

СЕНТЯБРЬ/ОКТАБРЬ

ISSN 0130-2221  
2010 · №5

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





## Головломки из проволоки

Вам, наверное, знакомы головоломки из сцепленных гвоздей или кусочков проволоки. Их есть великое множество, однако то и дело появляются новые. Иногда всего лишь небольшое изменение вида деталей меняет сложность задачи. Так получилось и с двумя головоломками, которым посвящена эта страница. Обе они составлены из двух одинаковых деталей, которые нужно расцепить. Придется немало повозиться и повертеть эти игрушки, прежде чем разгадка окажется в ваших руках.

Любителям мастерить головоломки самостоятельно рекомендуем заглянуть на четвертую страницу обложки №4 за 1989 год и вторую страницу обложки №5 за 2004 год – кроме множества других головоломок из проволоки там приведены и практические советы по их изготовлению.

*Е.Епифанов*



журнал©  
**Квант** СЕНТЯБРЬ 2010 №5  
ОКТАБРЬ 2010

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредитель —  
Российская академия наук  
Издатель —  
ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**В.В.Козлов**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбиллин (заместитель главного  
редактора), В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.В.Жуков,  
А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,  
А.И.Черноуцан (заместитель главного  
редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер**

Товарный знак «Журнал «Квант»  
является собственностью  
ООО НПП ОО «Бюро Квантум»  
© 2010, РАН,  
журнал «Квант»

- 2 Инверсия в цилиндрических зеркалах метро. *В.Арнольд*  
8 Темная энергия во Вселенной. *В.Рубаков*  
16 Теоремы софиста Горгия и современная математика.  
*Д.Фон-Дер-Флаасс*

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 7 «Небесные врата»

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 24 Задачи М2191–М2198, Ф2198–Ф2204  
25 Решения задач М2169–М2175, Ф2175, Ф2176, Ф2182–Ф2188

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Цвет

К М Ш

- 34 Задачи  
35 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
36 Как всегда, на высоте! *Г.Филипповский*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 40 О работе, точке приложения силы и точильном круге.  
*В.Птушенко*  
42 Увеличительная линейка. *В.Дроздов*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 43 О теплопередаче и не только. *А.Красночуб*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 47 Два этюда о динамике. *Е.Соколов*

ОЛИМПИАДЫ

- 50 Заключительный этап XXXVI Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
53 Заключительный этап XLIV Всероссийской олимпиады  
школьников по физике  
57 XIV Международный турнир «Компьютерная физика»  
59 Московская студенческая олимпиада по физике 2010 года  
60 Ответы, указания, решения

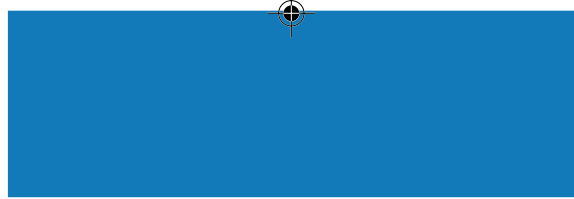
Информация (31, 52)  
«Квант» улыбается (35)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Рубакова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

**The McGraw-Hill Companies**

Этот номер журнала «Квант» вышел  
при финансовой поддержке компании  
The McGraw-Hill Companies



В 2009 году в издательстве МЦНМО вышла книга В.И.Арнольда «Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора)». Одну из глав этой книги мы и предлагаем вашему вниманию — разумеется, с рисунками автора. В конце главы подробно рассказывается об инверсии и ее свойствах. Содержание этого раздела выходит за рамки школьной программы, но может оказаться полезным тому, кто захочет глубже разобраться в обсуждаемом вопросе.

# Инверсия в цилиндрических зеркалах метро

В.АРНОЛЬД

**В**СЕ ВИДЕЛИ СВОЕ ОТРАЖЕНИЕ В ПЛОСКОМ зеркале — отражение левши является правшой, но в остальном изображение сходно с прообразом.

Но кто видел свое отражение в кривом зеркале, тот знает, какое оно смешное.

Рассмотрим, для простоты, цилиндрическое зеркало. Спрашивается, как выглядят отражения различных предметов в нем?

Много цилиндрических зеркал (и стоящих вертикально цилиндров-стоек, и горизонтальных поручней) имеется в каждом вагоне метро. Изображения окружающего мира в этих цилиндрических зеркалах совершенно необычны. Каковы они?

Проще всего разобраться с отражением одного точечного источника света. Его отражение в цилиндрическом зеркале тесно связано с математической инверсией

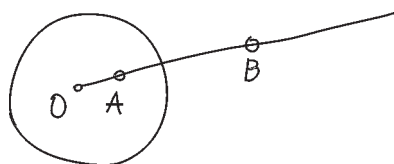


Рис.1. Инверсия переводит точку  $A$  в точку  $B$

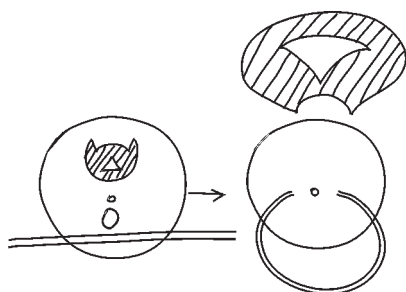


Рис.2. Инверсия кошки выводит ее из клетки, а инверсия прямой закругляет ее

— операцией, сопоставляющей каждой точке  $A$  евклидовой плоскости, на которой фиксирована окружность радиуса  $r$  с центром  $O$ , точку  $B$ , «симметричную относительно этой окружности», лежащую на том же выходящем из центра  $O$  луче, что и отражаемая точка  $A$ , но на тем большем расстоянии от центра  $O$ , чем ближе к центру была точка  $A$  (рис. 1, 2):

$$OA \cdot OB = r^2.$$

Каждый луч, выходящий из точки  $A$  и пересекающий заданную окружность, отражается от нее по закону «угол падения равен углу отражения» (рис.3).

Для плоского зеркала все лучи, выходящие из источника  $A$  отражаются в виде лучей, проходящих при продолжении в зазеркалье через одну и ту же

точку  $A^*$ . Получается такой же пучок лучей  $\{A^*A'\}$ , поэтому мы и видим отражение точки  $A$  в зазеркальной точке  $A^*$  (рис.4).

Для кривого зеркала прямолинейные лучи, отраженные в разных точках, уже не обязательно проходят через общую точку, даже если их продолжить за зеркало.<sup>1</sup>

Чтобы в этом разобраться, достаточно разобрать какой-нибудь пример, например — отражение зеркалом-окружностью пучка параллельных лучей, приходящих из одной и той же бесконечно удаленной точки  $A$ .

Явные вычисления лучей, отраженных в различных точках кругового зеркала, не очень сложны (для знающих тригонометрию). Но нарисовать эти лучи еще проще (рис.5). Дуги  $CD$  и  $CD'$  имеют одинаковую длину (вследствие закона «угол падения равен углу

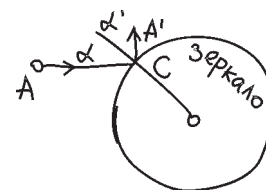


Рис.3. Отражение луча  $AC$  в виде луча  $CA'$  (углы  $\alpha$  и  $\alpha'$  равны)

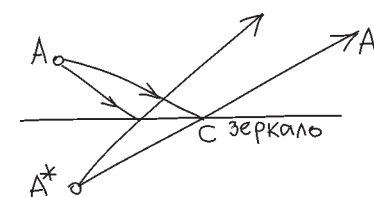


Рис.4. Отражение луча  $AC$  в виде луча  $CA'$  в прямом зеркале и точка  $A^*$  в зазеркалье

<sup>1</sup> Исключение — лучи, параллельные оси параболического зеркала, они собираются, после отражения в параболу, в одну точку.

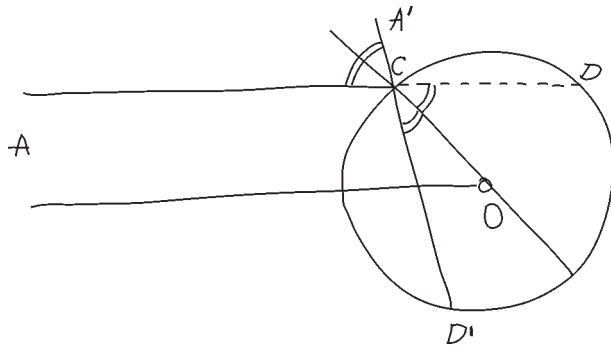


Рис.5. Построение отраженного окружностью луча  $CA'$

отражения» в точке отражения  $C$ ). Это позволяет быстро построить отраженные лучи.

Нарисовав эти отраженные лучи достаточно аккуратно, я получил следующую картинку (рис.6).

Полученное однопараметрическое семейство отраженных прямых на плоскости имеет огибающую (пока-

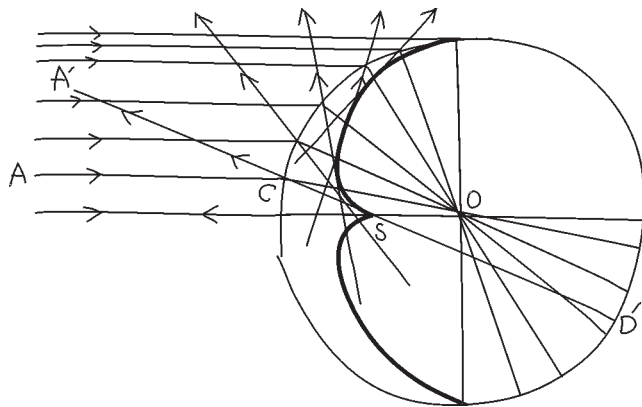


Рис.6. Семейство отраженных окружностью лучей, приходящих из бесконечности, и его огибающая кривая

занную на рис. 6 жирной линией). Это – кривая, в точках которой прямые отраженного семейства лучей пересекаются с бесконечно близкими отраженными прямыми того же семейства лучей. Эти прямые (продолженные отраженные лучи) касаются построенной огибающей кривой. Можно еще сказать, что эта кривая образована «фокальными точками» отраженного семейства лучей (фокальные точки в оптике – это точки пересечения бесконечно близких лучей семейства при их продолжении).

Огибающая семейства лучей называется каустикой («жгущей»), так как на ней свет семейства концентрируется (фокусируется), его энергия больше, чем в остальных местах. Именно при помощи каустики системы зеркал Архимед, согласно легенде, сжег вражеские корабли, осаждавшие Сиракузы.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Аристофан в «Облаках» приписывает Сократу еще более раннее использование каустик в деловых вопросах: он советует своему клиенту выбрать на заседании суда солнечное место и, купив в аптеке линзу, сжечь каустикой солнечных лучей свое долговое обязательство, демонстрируемое суду противником. Аристофан, правда, указывает, что эта прикладная математика и привела Сократа к смертельному приговору сограждан.

Во всяком случае, большая часть отраженных лучей идет так, как если бы они исходили из точек каустики, так что изображение нашей исходной бесконечно удаленной точки  $A$  будет казаться размазанной вдоль каустики линией, а не точкой.

Дело, однако, обстоит сложнее, потому что яркость изображения вдоль каустики вовсе не постоянна – некоторые ее места ярче (и именно их использовал для своей системы лучей Архимед).

А именно, каустика нашего семейства отраженных лучей рисунка 6 – не гладкая кривая: она имеет особую точку  $S$  (нетрудно посчитать, что она делит пополам радиус).

Вблизи этой точки семейство (продолженных) лучей концентрируется еще сильнее, чем даже в остальных точках каустики.<sup>3</sup> Поэтому, хотя изображение светящейся (бесконечно удаленной) точки  $A$  и размазано вдоль каустики, особенно ярко светится именно ее особая точка  $S$  (а остальные точки недостаточно внимательный зритель может и не заметить).

Вследствие всего этого наблюдаемое экспериментатором изображение точки  $A$  будет не линией, а единственной точкой  $S$  – точкой наибольшей концентрации отраженных лучей, продолженных в зазеркалье.

Тригонометрические вычисления, которые я оставляю читателю, подтверждают и эти выводы, и их устойчивость: например, для источника света  $A$ , расположенного в другом месте, тоже получается каустика продолженных в зазеркалье лучей с особой точкой возврата, которая и воспринимается наблюдателем как изображение  $A^*$  точки  $A$  в кривом зеркале.

Эта точка  $A^*$ , как и  $S$  в рассмотренном выше примере с бесконечно удаленной точкой  $A$ , лежит на том же луче с началом в центре  $O$  зеркала, что и отражаемая точка  $A$ . Но положение этой точки на соответствующем радиусе окружности зависит от расстояния точки  $A$  от центра окружности (когда это расстояние бесконечно, отраженная точка делит радиус пополам, а когда точка  $A$  лежит на отражающей окружности, точка  $A^*$  вырождается в  $A$ ).

Вычисление положения изображения  $A^*$  на луче  $OA$  при данном расстоянии  $OA = X \cdot R$  приведено на рисунке 7.

Радиусы отражающей окружности имеют длины

$$OR = OC = R.$$

Малый центральный угол  $\alpha$  доставляет катеты треугольника  $OCP$ :

$$OP = R \cos \alpha, \quad CP = R \sin \alpha.$$

Прямоугольный треугольник  $ACP$  доставляет асимптотическое выражение малого угла  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{CP}{AP} = \frac{R \sin \alpha}{R(X - \cos \alpha)} \sim \frac{\alpha}{X - 1}, \quad \varphi \sim \frac{\alpha}{X - 1}.$$

<sup>3</sup> Можно посчитать, что эта особенность – полукубическая точка возврата (в окрестности которой каустика задается в подходящей гладкой системе криволинейных координат уравнением  $y^2 = x^3$ ). Такая особенность типична (для систем лучей общего положения) и устойчива (не исчезает при малом шевелении семейства), ее и использовали Сократ и Архимед.

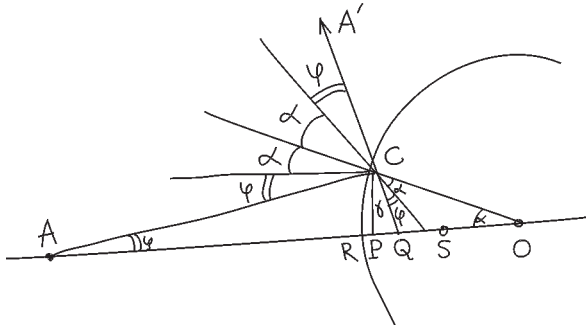


Рис.7. Пересечение в зеркале бесконечно близких прямых AR и AC

Прямоугольный треугольник OCP доставляет для угла PCQ выражение  $\gamma = (\pi/2) - (\varphi + 2\alpha)$ ,  $\varphi + 2\alpha \sim \frac{2X-1}{X-1} \alpha$ .

Прямоугольный треугольник CPQ доставляет для катета против угла  $\gamma$  выражение

$$PQ = CP \operatorname{tg} \gamma = CP \frac{\cos(\varphi + 2\alpha)}{\sin(\varphi + 2\alpha)}$$

Найденные выше асимптотики величин CP и  $\varphi + 2\alpha$  доставляют для поведения расстояния от P до Q при  $\alpha \rightarrow 0$  выражение

$$PQ \sim \frac{R \sin \alpha}{\frac{2X-1}{X-1} \alpha} \rightarrow R \frac{X-1}{2X-1}$$

Расстояние от отраженной точки Q до середины S радиуса OR стремится при этом к

$$QS = PS - PQ \rightarrow \frac{R}{2} - R \frac{X-1}{2X-1} = \frac{R}{2(2X-1)}$$

Отражаемая точка A отстоит от середины S радиуса OR на расстояние

$$AS = AO - SO = R(X-1/2) = \frac{2X-1}{2} R$$

Мы заключаем, что расстояния от точки S до отражаемой точки A и до ее отражения Q взаимно обратны:

$$QS \cdot AS = R^2/4$$

Тем самым мы доказали следующий (удивительный) результат.

Наблюдатель видит в цилиндрическом зеркале инверсию окружающего мира относительно вдвое более тонкого цилиндра (рис.8), касающегося оси отражающего цилиндра (в наших плоских обозначениях – инверсию в окружности с центром S радиуса R/2).



Рис.8. Отражение в цилиндрическом зеркале – инверсия в (жирной) окружности

Можно было бы подумать, что, глядя на цилиндрическое зеркало (например, на ручки в метро), мы увидим инверсное изображение окружающих предметов.

Что этого не может быть, ясно уже из описания расположения инвертирующей окружности (или цилиндра) по отношению к отражающей окружности на плоскости (или цилиндрическому зеркалу в пространстве). А именно, инвертирующий цилиндр направлен от оси отражающего цилиндра в определенном направлении, в то время как, вследствие симметрии отражающего цилиндра относительно вращений вокруг его оси, все направления ухода от оси вращения должны быть равноправными и никакое из них не может оказаться предпочтительным.

В действительности приведенные выше вычисления устанавливают, что отражение каждого источника света является результатом применения описанной инверсии к точке источника только для точек луча, проходящего через центр отражающей окружности и глаз наблюдателя (формально это выражалось в предположении в вычислении малости угла  $\varphi$ ).

На этом центральном луче зрения изображения  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  точек A, B, C, D (рис.9) действительно

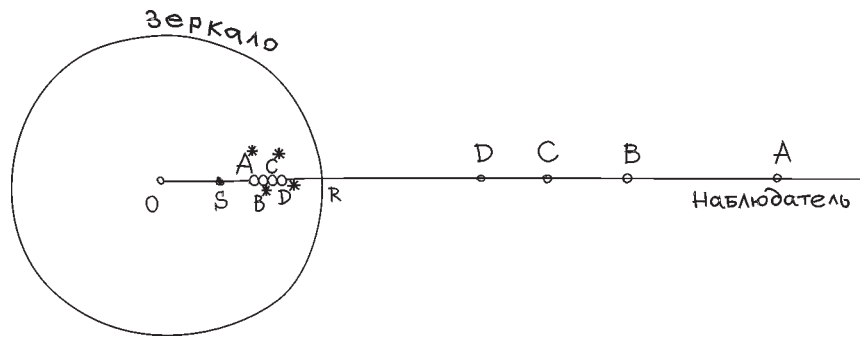


Рис.9. Изображения  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  точек A, B, C, D центрального луча

инверсны изображаемым точкам, поэтому и вблизи центрального луча зрения отражение приблизительно описывается инверсией. Но по мере удаления от центрального луча зрения отражение описывается инверсиями относительно все более повернутых инвертирующих окружностей, так что в целом результат к одной инверсии не сводится.

### Добавление. О свойствах инверсии

Хотя многие читатели, вероятно, знают об этих замечательных фактах, я кратко опишу их здесь.

**Теорема.** Инверсия переводит окружности, не проходящие через ее центр, в окружности, а проходящие через центр – в прямые (рис.10).

Доказательство второго утверждения особенно просто, когда окружность C пересекает инвертирующую окружность (рис.11).

Прямоугольные треугольники  $OB^*A^*$  и  $OAB$  подобны, поэтому  $OB^*/OA^* = OA/OB$ , так что  $OA \cdot OA^* = OB \cdot OB^*$ .

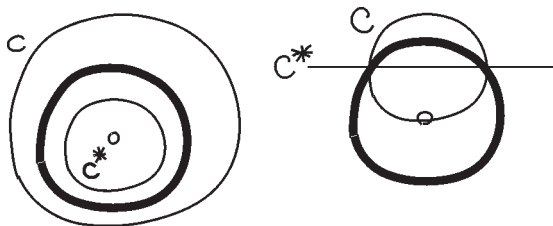


Рис.10. Инверсия переводит окружность  $c$  в окружность  $c^*$ , а окружность  $C$  в прямую  $C^*$

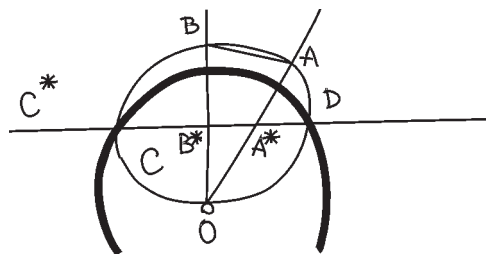


Рис.11. Инверсия окружности  $C$ , проходящей через центр  $O$  инвертирующей (жирной) окружности

Для случая  $A = D$  мы находим  $OB \cdot OB^* = R^2$ . Это доказывает совпадение образа окружности  $C$  при инверсии с прямой  $C^*$  (соединяющей обе точки пересечения окружности  $C$  с инвертирующей окружностью).

Случай, когда окружность  $C$  слишком мала, чтобы пересечь инвертирующую окружность, сводится к разобранному случаю растяжением (гомотетией с центром  $O$ ). Когда окружность  $C$  подвергается такой гомотетии, растягиваясь в  $\alpha$  раз, ее образ при инверсии тоже подвергается гомотетии с центром  $O$ , а именно сжатию в  $\alpha$  раз.

Поэтому сжатый образ – прямая, а значит, и до сжатия образ был прямой (только не пересекающей инвертирующую окружность).

Утверждение теоремы об образе окружности  $c$ , не проходящей через центр инверсии, особенно легко доказать в том случае, когда эта окружность  $c$  не содержит в ограниченном ею круге центр инверсии  $O$  (рис.12).

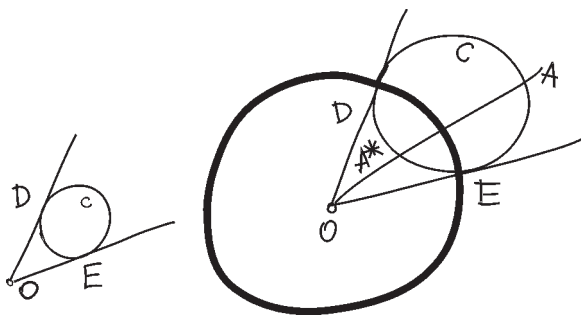


Рис.12. Инверсия окружности  $c$ , не окружающей центр инверсии  $O$

В этом случае к окружности  $c$  можно провести из точки  $O$  две касательные. Их длины одинаковы:  $OD = OE$ . Растягивая (или сжимая) плоскость гомотетией с центром  $O$ , мы можем превратить окружность  $c$  в гомотетичную специальную окружность, для которой длины касательных  $OD = OE = R$  совпадают с длиной

$R$  радиуса инвертирующей окружности (так что специальная окружность будет пересекать инвертирующую жирную окружность в точках  $D$  и  $E$  под прямыми углами).

По теореме о секущей  $OA^*A$  специальной окружности  $c$  мы находим

$$OA^* \cdot OA = OD^2 = R^2.$$

Это тождество означает, что точки  $A$  и  $A^*$  специальной окружности  $c$  переходят при нашей инверсии друг в друга, так что образ специальной окружности совпадает с ней самой.

Возвращаясь к исходной окружности сжатием специальной окружности, мы видим, что образ этой сжатой (исходной) окружности при инверсии получается из специальной окружности гомотетичным растяжением. Значит, этот образ  $c^*$  – тоже окружность.

В случае когда окружность  $c$  окружает центр  $O$ , теорема тоже верна. Но я не знаю столь простого доказательства.

*Замечание.* Специальная окружность ортогональна инвертирующей.<sup>4</sup> При инверсии каждая из них переходит в себя. Поэтому угол между ними сохраняется при инверсии.

Оказывается, преобразование инвертирования сохраняет и углы между любыми двумя кривыми (с точностью до знака). Это видно, например, из рисунка 13, где окружность  $C$ , проходящая через центр инверсии  $O$ , пересекает инвертирующую окружность в точке  $D$  (и переходит при инверсии в прямую  $DE$ ).

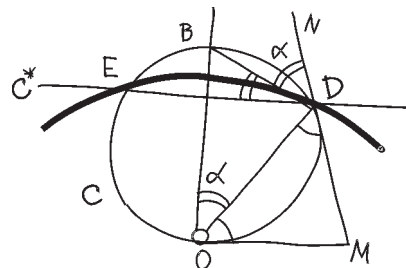


Рис.13. Сохранение угла (с инвертирующей окружностью) при инверсии

Нормали направлений  $OD$  (к инвертирующей окружности) и  $OB$  (к инверсированной кривой  $C^*$ ) в точке пересечения  $D$  образуют угол  $\alpha = \angle DOB$ .

Касательные к инвертируемой окружности в точках  $O$  и  $D$  образуют равнобедренный треугольник, поэтому углы  $DOM$  и  $ODM$  равны  $\pi/2 - \alpha$ .

Касательная  $DB$  к инвертирующей окружности в точке  $D$  проходит через конец  $B$  диаметра  $OB$  инвертируемой окружности  $C$ , так как угол  $BDO$  (между касательной и радиусом инвертирующей окружности) прямой.

Следовательно, угол  $BDN$  (между касательными к инвертирующей и инвертируемой окружностям в точке их пересечения  $D$ ) – такой же, как угол  $DOB = \alpha$

<sup>4</sup> Другими словами, пересекается с ней под прямым углом. Говорят, что кривые пересекаются в данной точке под углом  $\alpha$ , если касательные к ним в этой точке пересекаются под углом  $\alpha$ . (Прим. ред.)

между направлениями, перпендикулярными к инвертирующей и проинвертированной кривой  $C^*$  (он равен  $\pi - \pi/2 - (\pi/2 - \alpha) = \alpha$ ).

Итак, углы между инвертируемой и проинвертированной окружностями, с одной стороны, и инвертирующей окружностью, с другой – в точке  $D$  одинаковы.

Из этого следует, что инверсия сохраняет углы всех проходящих через точку  $D$  кривых с инвертирующей окружностью, а значит, она сохраняет и угол между любыми двумя кривыми, проходящими через точку  $D$ .

Разумеется, сохраняются здесь неориентированные углы: инверсия, подобно обычному отражению, меняет ориентацию отображаемой плоскости и переводит «положительные» углы в «отрицательные» (того же модуля).

Наши рассуждения доказывают сохранение (неориентированных) углов в точках инвертирующей окружности. Но любую (отличную от  $O$ ) точку плоскости можно поместить на эту окружность (радиуса  $R$ ) надлежащей гомотетией (с центром  $O$ ).

Гомотетии сохраняют углы, поэтому такими подобными растяжениями и сжатиями плоскости мы выведем сохранение углов пересечения любых кривых в любой (отличной от центра инверсии  $O$ ) точке из их сохранения в точках инвертирующей окружности, где это сохранение углов уже доказано выше.

Преобразования, сохраняющие углы, называются конформными. Таким образом, инверсия – конформное преобразование плоскости (с выкинутой точкой  $O$ ), меняющее ориентации.

**Задача.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – любой многочлен, рассматриваемый как отображение (в себя) евклидовой плоскости  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  с декартовыми ортонормированными координатами  $(x, y)$  для точки  $z = x + iy$ .

Докажите, что отображение  $f$  конформно (в любой некритической точке многочлена  $f$ , т.е. там, где его производная отлична от 0).

**Решение.** Начните с линейного многочлена и используйте затем формулу Тейлора для сведения любого отображения к его (линейному) дифференциалу.

В этих терминах инверсия задается формулой

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}},$$

где  $\bar{z} = x - iy$ , и ее конформность вытекает из дифференцируемости:

$$\frac{d(1/\bar{z})}{dz} = -\frac{1}{z^2}.$$

**Задача.** Конформно ли отображение, переводящее точку  $z \in \mathbb{C}$  в  $z^2$ , во всех точках плоскости?

**Решение.** Перпендикулярные прямые – вещественная и мнимая оси  $\{y = 0\}$  и  $\{x = 0\}$  плоскости  $\mathbb{C} = \{z\}$  – переходят в полуоси положительных и отрицательных значений  $z^2$ , которые вовсе не ортогональны.

Это нарушение конформности сильно искажает вид отображаемых фигур (рис.14).

Инверсия – конформное преобразование, поэтому отражаемые фигуры более похожи на себя.

**Задача.** Образуют ли преобразования инверсии (с разными инвертирующими окружностями) группу?

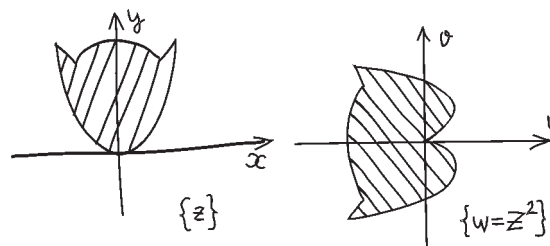


Рис.14. Неконформное преобразование кошки сделало ее гладкий подбородок негладким

**Решение.** Инверсия меняет ориентации, а ориентаций плоскость имеет только две. Поэтому произведение двух инверсий (сохраняющее ориентацию плоскости) не может быть инверсией.

Сохраняющие ориентацию произведения инверсий (имеющие четное число сомножителей) уже образуют группу. Это – группа «дробно-линейных» преобразований

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

фундаментальная для геометрии Лобачевского (где  $f$  с вещественными  $a, b, c, d$  и  $ad - bc = 1$  образуют «группу движений в модели Пуанкаре»).

В этой модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , в отличие от модели Кэли–Клейна в круге, обсуждавшейся выше, роль прямых играют не все прямые Евклида, а все прямые и окружности, перпендикулярные «абсолюту»  $\text{Im } z = 0$  (рис.15).



Рис. 15

Замечательным свойством этой модели является то, что углы Лобачевского в этой модели равны евклидовым углам между соответствующими кривыми верхней полуплоскости.

Удивительно еще и то, что обе модели – Пуанкаре и Кэли–Клейна – эквивалентны: они доставляют просто разные карты одной и той же плоскости Лобачевского.

**Задача.** Найдите диффеоморфизм верхней полуплоскости на внутренность единичного круга, переводящий модель Пуанкаре в модель Кэли–Клейна.



## «НЕБЕСНЫЕ ВРАТА»

«Небесные врата» (Cloud Gate) – так называется скульптура, установленная в Чикаго, в центре парка Миллениум. Жители города называют скульптуру «Боб» или «Капля» – и правда, на каплю она похожа



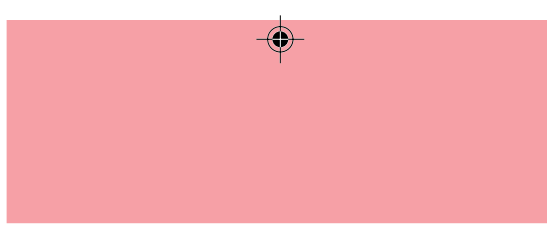
больше всего. Эллипсоидальная «Капля» изготовлена из пластин нержавеющей стали и отполирована до зеркальной гладкости. Она лежит на арках четырехметровой высоты, представляющих собой своеобразные ворота.

Автор «Небесных врат» – британский скульптор Аниш Капур. По его словам, он хотел соединить в своем произведении небо и горизонт Чикаго, «чтобы кто-то видел в моей скульптуре отражение плавающих облаков, а кто-то другой – отражение в ней самых высоких зданий в мире. А кроме того, поскольку скульптура сделана в форме ворот, каждый может войти в большое



внутреннее углубление-камеру и наблюдать в нем свое зеркальное отражение примерно так же, как он наблюдает зеркально отраженный город в наружной части скульптуры».

Помещаем фотографии скульптуры «Небесные врата», сделанные нашим постоянным автором Г.Гальпериным. Нам кажется, что они прекрасно дополняют статью В.Арнольда об отражениях в цилиндрических зеркалах.



На юбилейный для «Кванта» год выпало знаменательное событие и у наших друзей: в октябре выходит 1000-й (тысячный!) номер замечательного научно-популярного журнала «Знание – сила». Взаимные поздравления принято сопровождать подарками, и мы решили обменяться опубликованными материалами, адаптируя их каждый для своей аудитории.

Предлагаем вашему вниманию вариант статьи академика Валерия Анатольевича Рубакова, переработанный для журнала «Квант».

# Темная энергия во Вселенной

**В.РУБАКОВ**

**Ф**ИЗИКИ ЛЮБЯТ КРАСНОЕ СЛОВЦО. В ИХ СРЕДЕ с некоторых пор принято давать «ненаучные» названия вновь открытым сущностям. Взять хотя бы «странный» или «очарованный» кварки. Вот и темная энергия – не синоним темных сил, а термин, придуманный для обозначения необычного свойства нашей Вселенной.

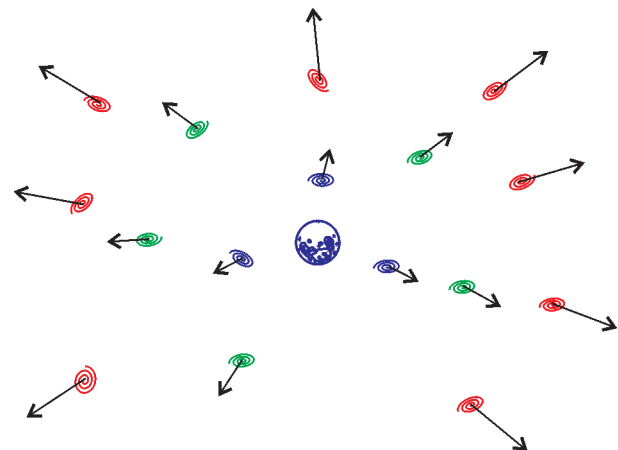
Открытие темной энергии было сделано астрономическими методами и стало для большинства физиков полной неожиданностью. Темная энергия – пожалуй, главная загадка современного естествознания. Вполне вероятно, что ее разгадка станет важнейшим событием физики XXI века, сравнимым по масштабу с крупнейшими открытиями недалекого прошлого, такими как открытие феномена расширения Вселенной. Не исключено даже, что произойдет настолько радикальное развитие теории, что оно встанет в один ряд с созданием общей теории относительности, открытием кривизны пространства-времени и связи этой кривизны с гравитационными силами. Мы сейчас находимся в начале пути, и разговор о темной энергии – это возможность заглянуть в «лабораторию» физиков в то время, когда их работа идет полным ходом.

## Немного истории

### «Маловато будет»

То, что в нашей Вселенной «что-то не так», стало ясно космологам уже к началу 90-х годов прошлого века. Чтобы пояснить, о чем идет речь, начнем с того, что напомним о расширении нашей Вселенной. Удаленные друг от друга галактики разбегаются, причем чем дальше находится галактика, тем быстрее она удаляется от нас. Количественно темп расширения характеризуется параметром (постоянной) Хаббла – коэффициентом пропорциональности между скоростью удаления и расстоянием. Значение параметра Хаббла в современной Вселенной довольно хорошо

измерено: темп расширения Вселенной сегодня таков, что галактики, удаленные от Земли на расстояние 1 миллиард световых лет, убегают от нас со скоростью 22000 километров в секунду. Параметр Хаббла зависит от времени; так, в далеком прошлом Вселенная расширялась гораздо быстрее, чем сейчас, и, соответственно, параметр Хаббла был гораздо больше.



*Рис. 1. Расширяющаяся Вселенная. Более далекие галактики удаляются от нас быстрее и выглядят более красными из-за эффекта Доплера. Измерения расстояний до удаленных галактик совместно с измерениями их скоростей позволяют определить значение параметра Хаббла, характеризующего темп расширения Вселенной*

В современной теории гравитации – общей теории относительности – параметр Хаббла однозначно связан с двумя другими характеристиками Вселенной: во-первых, с суммарной плотностью энергии всех форм материи, вакуума и т.д., а во-вторых, с кривизной *трехмерного пространства*. Наше трехмерное пространство, вообще говоря, не обязано быть евклидовым; его геометрия может, например, быть аналогична геометрии сферы; сумма углов треугольника может не

равняться  $180^\circ$ . В таком случае «упругость» пространства, с точки зрения расширения Вселенной, играет ту же роль, что и плотность энергии. Итак, в рамках общей теории относительности параметр Хаббла определяет сумму полной плотности энергии во Вселенной и вклада, связанного с возможной неевклидовостью трехмерного пространства.

К началу 90-х годов с неплохой точностью была оценена и плотность энергии «нормальной» материи в современной Вселенной. Нормальная она в том смысле, что испытывает такие же гравитационные взаимодействия, что и обычное вещество. Так, для нормальной материи справедлив закон всемирного тяготения Ньютона. Дело, впрочем, осложняется тем, что большая часть нормальной материи это отнюдь не известное нам вещество (атомы и ионы), а так называемая *темная материя*. Темная материя, по-видимому, состоит из новых, не открытых пока в земных экспериментах элементарных частиц. В отличие от многих известных частиц, они не несут электрического заряда, а потому не излучают свет; состоящая из них материя действительно темная. Сходство с обычным веществом состоит в том, что силы гравитационного притяжения заставляют темную материю собираться в сгустки – галактики и скопления галактик. Она и сама притягивает вещество и свет – именно по эффекту гравитационного притяжения темная энергия и была обнаружена. Более того, измерения гравитационных сил в скоплениях галактик позволили определить массу темной материи в этих скоплениях, а в конечном итоге – в целом во Вселенной. Таким образом и была найдена полная плотность энергии нормальной материи (для нее справедлива знаменитая формула  $E = mc^2$ ).

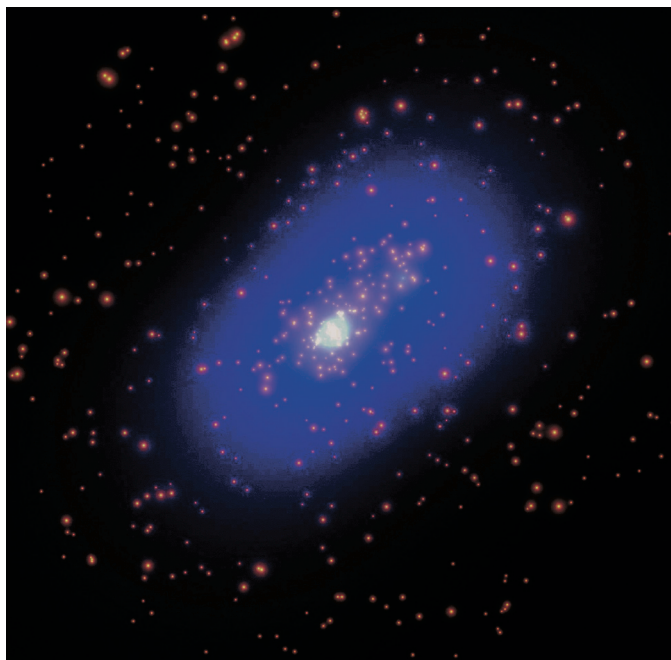


Рис. 2. Распределение массы в скоплении галактик. Яркие пятна – галактики. Масса же сосредоточена в основном в темной материи, распределенной по скоплению более равномерно (это распределение условно показано голубым цветом)

И что же оказалось? Выяснилось, что нормальной материи явно не хватает для объяснения измеренного темпа расширения Вселенной. Причем сильно: «недостача» составляла около  $2/3$  (по современным оценкам около 72%). Возможных объяснений этому факту было два: либо трехмерное пространство искривлено и недостающий вклад в параметр Хаббла связан с «упругостью» пространства, либо во Вселенной присутствует новая форма энергии, которую впоследствии и стали называть темной энергией.

Еще одной трудностью старой доброй космологической модели был возраст современной Вселенной. Эта модель давала для возраста значение около 9 миллиардов лет. В то же время возраст старых звездных скоплений оценивался (и сейчас оценивается) как 13–14 миллиардов лет. Неувязочка! Нужно сказать, что с проблемой не вполне справлялась и модель с искривленным пространством, в ней возраст – около 11 миллиардов лет (в модели с темной энергией – около 14 миллиардов лет, все хорошо). Эту трудность, впрочем, всерьез воспринимали немногие, а большинство рассчитывало, что «как-нибудь рассосется».

#### Куда ни кинь...

С теоретической точки зрения, обе возможности – и неевклидовость пространства, и темная энергия – выглядели крайне неправдоподобными.

Начнем с кривизны трехмерного пространства. В процессе расширения Вселенной пространство разглаживается, его кривизна уменьшается. Если кривизна отличается от нуля сейчас, то в прошлом она была больше, чем сегодня. Однако плотность энергии (массы) материи убывает при расширении Вселенной *еще быстрее*. Это означает, что в прошлом *относительный* вклад кривизны в параметр Хаббла был очень мал, а главным, с большим запасом, был вклад материи. Для того чтобы сегодня расширение Вселенной на  $2/3$  обеспечивалось кривизной, необходимо «подогнать» значение радиуса кривизны пространства в прошлом с фантастической точностью – через одну секунду после Большого взрыва он должен был быть равен одной миллиардной доле от тогдашнего размера наблюдаемой Вселенной, не больше и не меньше! Без такой подгонки кривизна сегодня была бы либо на много порядков больше, либо на много порядков меньше, чем необходимо для объяснения наблюдений.

Даже если отвлечься от гипотезы о том, что недостающий вклад в современный параметр Хаббла обеспечивается именно кривизной пространства, проблема кривизны все равно остается: в любом случае необходимо, чтобы кривизна была чрезвычайно мала на ранних стадиях, иначе она была бы слишком велика сегодня. Эта проблема была одним из главных соображений, приведших к представлению об инфляционной стадии эволюции Вселенной. Согласно инфляционной теории (предложенной А. Старобинским и независимо А. Гуттом и сформированной благодаря работам А. Линде, А. Албрехта и П. Стейнхардта), Вселенная на самом раннем этапе своей эволюции прошла через стадию чрезвычайно быстрого, экспоненциального расшире-

ния (раздувания, инфляции). По окончании этой стадии Вселенная разогрелась до очень высокой температуры, и наступила эпоха горячего Большого взрыва.

Хотя инфляционная стадия длилась, скорее всего, малую долю секунды, за это время Вселенная растянулась настолько, что ее размер стал гораздо больше размера той части, которую мы видим сегодня. Для нас важно, что в результате инфляционного растяжения пространства его радиус кривизны упал практически до нулевого значения. Таким образом, инфляционная теория приводит к предсказанию о том, что пространство современной Вселенной с высочайшей степенью точности евклидово. Это, конечно, идет вразрез с гипотезой о том, что Вселенная расширяется сегодня на  $2/3$  благодаря кривизне.

С темной энергией дело обстоит аналогичным образом, только еще хуже. Мы будем обсуждать различные гипотезы о природе темной энергии ниже, а здесь ограничимся следующим замечанием. Независимо от того, что представляет собой темная энергия, ее плотность может быть охарактеризована единственным параметром размерности энергии. Для соответствия наблюдательным данным значение этого параметра энергетического масштаба темной энергии должно быть примерно равно 0,002 электронвольт. В то же время известные фундаментальные взаимодействия – сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное – характеризуются своими энергетическими масштабами. Наименьший из них относится к сильным (ядерным) взаимодействиям и составляет около 200 миллионов электронвольт. Получается нестыковка в 100 миллиардов раз! Хуже всего, что этой нестыковке и вообще чрезвычайно малой величине темной энергии очень трудно найти объяснение.

Из-за трудностей с интерпретацией темной энергии более популярной в течение довольно долгого времени была та точка зрения, что за современный темп расширения Вселенной ответственна все же пространственная кривизна. Многие (хотя и далеко не все) физики никак не могли воспринять всерьез возможность того, что темная энергия действительно существует, и считали пространственную кривизну «меньшим из зол». Вопрос, как обычно, был решен экспериментом.

#### Вселенная расширяется с ускорением

Перелом наступил в 1998–1999 годах, когда две группы из США (одна под руководством А. Райсса и Б. Шмидта, а другая – С. Перлмуттера) сообщили о результатах наблюдений удаленных сверхновых типа 1a. Из этих наблюдений следовало, что наша Вселенная расширяется *с ускорением*. Такое свойство вполне согласуется с представлением о темной энергии, в то время как неевклидовость пространства к ускоренному расширению не приводит. Тем самым был сделан однозначный выбор в пользу темной энергии, а гипотеза о неевклидовом трехмерном пространстве была отвергнута (мы еще ненадолго вернемся к ней).

Несколько слов о сверхновых типа 1a. Это – термоядерные взрывы, которыми заканчивается жизнь не-

которых типов звезд. Детальное теоретическое описание этих взрывов до сих пор отсутствует, но на основании наблюдений близких сверхновых были установлены эмпирические закономерности, позволяющие определить их абсолютную светимость, т.е. энергию, которую они излучают в процессе довольно короткой вспышки. Иными словами, сверхновые типа 1a представляют собой «стандартные свечи»: зная абсолютную светимость и измеряя видимую яркость (поток энергии, приходящий на Землю), можно определить расстояние до каждой из них – чем больше расстояние, тем меньше видимая яркость. Одновременно можно установить и скорость удаления от нас каждой из сверхновых (используя эффект Доплера). Сверхновые – очень яркие объекты, их видно на огромных расстояниях. Иначе говоря, удаленные сверхновые, которые мы наблюдаем сейчас, свернулись давным-давно, и поэтому скорость их убегания определялась темпом расширения Вселенной *тогда*, в далеком прошлом. Тем самым наблюдения сверхновых типа 1a позволяют определить темп расширения на сравнительно ранних этапах эволюции Вселенной (7 миллиардов лет назад и даже несколько раньше) и проследить зависимость этого темпа от времени. Именно это и дало возможность установить, что Вселенная расширяется с ускорением.

Сейчас имеется еще несколько наблюдательных результатов, никак не связанных со сверхновыми и независимо свидетельствующих об ускоренном расширении Вселенной. Например, сравнительно быстрое космологическое расширение препятствует формированию вновь образующихся объектов – крупных скоплений галактик. Галактики собираются в скопления под действием гравитационных сил, которыми они притягивают друг друга. Общее растяжение пространства, наоборот, заставляет галактики удаляться друг от друга и тем самым мешает им сгущаться. Ясно, что второй эффект тем сильнее, чем выше темп растяжения. При известной современной скорости расширения (параметре Хаббла) темп расширения *в прошлом* был меньше в ускоряющейся Вселенной по сравнению со Вселенной, расширяющейся с замедлением, и скопления должно было образовываться больше. Подсчет количества крупных скоплений на разных расстояниях от нас (и, стало быть, образовавшихся в разное время) показывает, что скопления формировались действительно весьма охотно, в полном согласии с представлением об ускоренном расширении Вселенной и в противоречии с моделью замедляющейся Вселенной без темной энергии, но с пространственной кривизной. Упомянем еще об изучении особенностей в распределении галактик в пространстве – так называемых барионных акустических осцилляций.

#### Пространство – евклидово

Окончательное доказательство того, что неевклидовость трехмерного пространства, если она и есть, не играет сколько-нибудь существенной роли в расширении Вселенной, было получено путем измерения свойств реликтового излучения. Реликтовое излучение, прони-

зывающее сегодня нашу Вселенную, было испущено на довольно ранней стадии космологической эволюции. Дело в том, что Вселенная в прошлом была гораздо более плотной и горячей, чем сейчас. В процессе расширения она стала более разреженной и остыла; современная температура реликтового излучения составляет 2,726 кельвина.

На ранних стадиях вещество в горячей Вселенной было в состоянии плазмы – протоны сами по себе, электроны сами по себе. Такая среда непрозрачна для электромагнитного излучения, фотоны все время рассеиваются, поглощаются, излучаются электронами. Когда Вселенная остыла до 3000 градусов, электроны и протоны довольно быстро объединились в атомы водорода, и вещество стало прозрачным для фотонов. Эпоха перехода вещества из плазменного в газообразное состояние и является эпохой последнего излучения реликтовых фотонов. В это время возраст Вселенной составлял 370 тысяч лет (современный возраст – 13,7 миллиардов лет). С тех пор фотоны распространяются по Вселенной свободно, их длина волны увеличивается из-за растяжения пространства, и сегодня эти реликтовые фотоны представляют собой радиоволны.

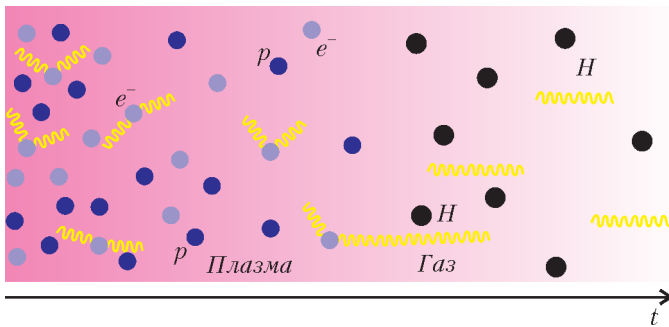


Рис. 3. При температуре 3000 градусов вещество во Вселенной перешло из плазменного состояния в газообразное и стало прозрачным для фотонов. Рекомбинация произошла тогда, когда возраст Вселенной составлял 370 тысяч лет. Желтым цветом схематически изображены фотоны, по горизонтальной оси отложено время

В эпоху излучения реликтовых фотонов Вселенная не была в точности однородной. Имевшиеся тогда неоднородности были зародышами структур – первых звезд, галактик, скоплений галактик. В то время неоднородности плазмы, как обычно для плотных сред, представляли собой звуковые волны. Важно, что в ту эпоху во Вселенной имелся характерный масштаб расстояний, который проявляется сейчас в свойствах излученных тогда реликтовых фотонов. Звуковые волны с большой длиной и, соответственно, малым периодом еще не успели развиться к эпохе излучения реликтовых фотонов, а волны с «правильной» длиной как раз успели попасть в фазу максимального сжатия. Эта правильная длина волны представляет собой «стандартную линейку» эпохи излучения реликтовых фотонов; ее размер надежно вычисляется в теории горячего Большого взрыва.

Неоднородность Вселенной эпохи последнего излучения реликтовых фотонов проявляется в том, что фотоны, излученные в разных местах, имеют немного

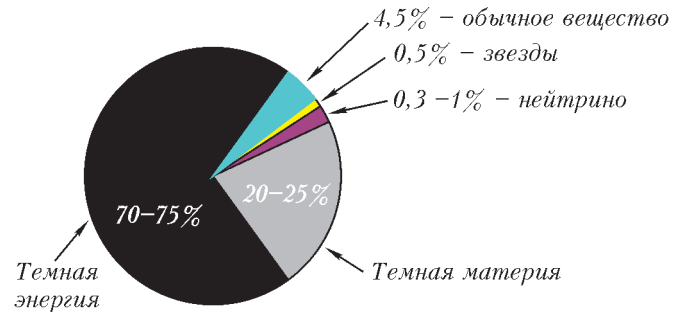


Рис. 4. Баланс энергий в современной Вселенной

разные температуры. Иными словами, температура фотонов зависит от направления на небесной сфере, с которого они к нам приходят. Эффект слабый: относительная разница температур в разных направлениях составляет около  $1/10000$ . Тем не менее, этот эффект был надежно измерен. Более того, на рубеже XX–XXI веков впервые был измерен угол, под которым видна «стандартная линейка». Ясно, что этот угол зависит от геометрии пространства: если сумма углов треугольника превышает  $180^\circ$ , то и этот угол больше. В результате было выяснено, что наше трехмерное пространство с хорошей степенью точности евклидово. Последующие измерения подтвердили этот вывод. С точки зрения расширения Вселенной, существующие результаты означают, что кривизна пространства вносит пренебрежимо малый вклад (менее 1%) в параметр Хаббла. Темп расширения Вселенной на 70% обусловлен сегодня именно темной материей.

### Больше не знают о ней ничего

Какие же свойства темной энергии известны сегодня? Таких свойств немного, всего три. Но то, что известно, может справедливо вызвать изумление.

Первое – это то, что, в отличие от нормальной материи, темная энергия не сгущается, не собирается в объекты типа галактик или их скоплений. Насколько сейчас известно, темная энергия «разлита» по Вселенной равномерно. Это утверждение, как и любое, основанное на наблюдениях или экспериментах, справедливо с определенной точностью. Нельзя полностью исключить того, что где-то во Вселенной плотность темной энергии немного больше, а где-то немного меньше средней плотности, где-то темная энергия чуть-чуть более густая, а где-то чуть-чуть более разреженная. Однако из наблюдений следует, что такие отклонения от однородности, если они и есть, должны быть весьма малы по величине.

О втором свойстве мы уже говорили: темная энергия заставляет Вселенную расширяться с ускорением. Этим темная энергия тоже разительно отличается от нормальной материи. Для нормальной материи справедливо обычное представление о том, как «работают» гравитационные силы: частички вещества, образовавшиеся, скажем, в результате взрыва и разлетающиеся от центра, постепенно замедляют свой разлет из-за гравитационного притяжения к центру. Если бы не темная энергия, так же обстояло бы дело и во Вселенной:

скорость разбегания галактик уменьшалась бы с течением времени. Темная энергия приводит к обратному эффекту – галактики разбегаются все быстрее и быстрее.

Два описанных свойства говорят о том, что темная энергия в определенном смысле испытывает антигравитацию, для нее имеется гравитационное отталкивание вместо гравитационного притяжения. Из-за этого расширение Вселенной ускоряется, из-за этого же темная энергия распределена в пространстве равномерно. Области с повышенной плотностью нормальной материи за счет гравитационного притяжения собирают вещество из окружающего пространства, сами эти области сжимаются и образуют плотные сгустки; именно так сформировались первые звезды, а потом галактики и скопления галактик. Для антигравитирующей субстанции все наоборот: области с повышенной плотностью (если они есть) растягиваются из-за гравитационного отталкивания, неоднородности разглаживаются, и никаких сгустков не образуется.

Третье свойство темной энергии состоит в том, что ее плотность не зависит от времени. Тоже удивительно: Вселенная расширяется, объем растет, а плотность энергии остается постоянной. Кажется, что здесь есть противоречие с законом сохранения энергии. За последние 8 миллиардов лет Вселенная расширилась вдвое, ее объем увеличился в 8 раз, во столько же раз увеличилась энергия в этом объеме. Несохранение энергии налицо. Разумеется, это относится именно к темной энергии: количество частиц нормальной материи в расширяющемся объеме не изменилось, их полная энергия покоя тоже не изменилась, а плотность энергии покоя упала в 8 раз.

На самом деле рост энергии при расширении Вселенной не противоречит законам физики. Темная энергия устроена так, что расширяющееся пространство совершает над ней работу, что и приводит к увеличению энергии этой субстанции в расширяющемся объеме пространства. Правда, расширение пространства само обусловлено темной энергией, так что ситуация напоминает барона Мюнхгаузена, вытаскивающего себя за волосы из болота. И тем не менее, противоречия нет: в космологическом контексте невозможно ввести понятие *полной* энергии, включающей в себя энергию самого гравитационного поля. Так что и закона сохранения энергии, запрещающего рост или убывание энергии какой-нибудь формы материи, тоже нет.

Утверждение о постоянстве плотности темной энергии также основано на астрономических наблюдениях, а потому тоже справедливо с определенной точностью. Чтобы охарактеризовать эту точность, скажем, что за последние 8 миллиардов лет плотность темной энергии изменилась не более чем в 1,4 раза, так что энергия в расширяющемся объеме увеличилась в 6–11 раз. Это мы сегодня можем сказать с уверенностью.

Отметим, что второе и третье свойства темной энергии – способность приводить к ускоренному расширению Вселенной и ее постоянство во времени (или, более общо, очень медленная зависимость от времени) – на самом деле тесно связаны между собой. Такая связь

следует из уравнений общей теории относительности. В рамках этой теории ускоренное расширение Вселенной происходит именно тогда, когда плотность энергии в ней или совсем не меняется, или меняется весьма медленно. Таким образом, антигравитация темной энергии и ее сложные отношения с законом сохранения энергии – две стороны одной медали.

Этим надежные сведения о темной энергии, по существу, исчерпываются. Дальше начинается область гипотез. Прежде чем говорить о них, обсудим вкратце один общий вопрос.

### Почему сейчас?

Если в современной Вселенной темная энергия дает наибольший вклад в полную плотность энергии, то в прошлом это было далеко не так. Скажем, 8 миллиардов лет назад нормальная материя была в 8 раз более плотной, а плотность темной энергии была такой же (или почти такой же), как сейчас. Отсюда несложно заключить, что тогда соотношение между энергией покоя нормальной материи и темной энергией было в пользу первой: темная энергия составляла около 15%, а не 72%, как сегодня. Из-за того что в то время главную роль играла нормальная материя, расширение Вселенной происходило *с замедлением*. Еще раньше влияние темной энергии на расширение было совсем слабым.

Замечательно, что такая картина подтверждается данными по сверхновым типа 1a. Наиболее удаленные из них взорвались более 8 миллиардов лет назад, и измерения их скоростей показывают, что расширение Вселенной тогда действительно замедлялось. Результаты других космологических наблюдений также говорят о том, что на ранних этапах эволюции Вселенной темная энергия была несущественна. Об одной серии таких результатов стоит упомянуть. В период от одной секунды до нескольких минут после Большого взрыва, когда температура во Вселенной менялась от 10 миллиардов до сотен миллионов градусов, в космической плазме активно шли термоядерные реакции. В результате образовались дейтерий, изотопы гелия и лития. В некоторых местах во Вселенной этот первичный состав вещества практически не изменился, и его удалось измерить. С другой стороны, его можно надежно рассчитать, при этом результат, разумеется, зависит от темпа расширения Вселенной в ту далекую эпоху. Так вот, результаты расчета согласуются с наблюдениями, если считать, что темная энергия не играла тогда никакой роли. Точнее, вклад темной энергии (как и других новых, гипотетических форм энергии) в полную плотность энергии в период термоядерных реакций ограничен на уровне около 15%. Точность вроде бы не очень высока, но не надо забывать, что речь идет о первых секундах после Большого взрыва!

Итак, влияние темной энергии и вызванное им ускорение расширения Вселенной – явления по космологическим меркам совсем недавние: ускорение началось всего 6,5 миллиардов лет назад. С другой стороны, поскольку плотность нормальной материи убывает со временем, а плотность темной энергии нет, темная

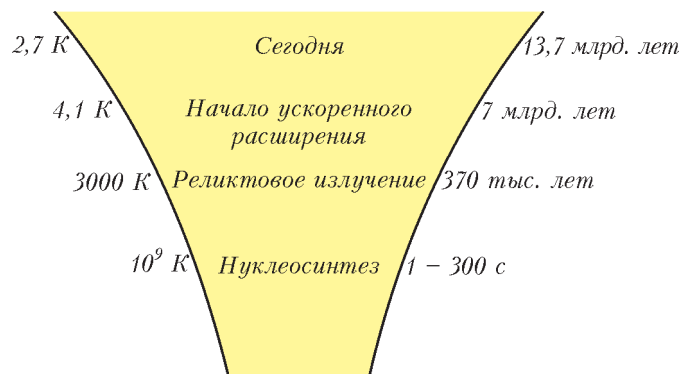


Рис. 5. Известные этапы эволюции Вселенной: слева указана температура, справа — возраст Вселенной

энергия вскоре (опять-таки по космологическим меркам) будет полностью доминировать. Значит, современный этап космологической эволюции — это переходный период, когда темная энергия уже играет заметную роль, но расширение Вселенной определяется еще не только ею, но и нормальной материей тоже. Является ли эта выделенность нашего времени случайным совпадением или за ней стоит какое-то глубокое свойство нашей Вселенной? Этот вопрос — почему сейчас? — остается пока открытым.

### Кандидаты на роль носителя темной энергии

#### Энергия вакуума — космологическая постоянная

Если бы не было гравитации, абсолютное значение энергии не имело бы физического смысла. Во всех теориях, описывающих природу, за исключением теории гравитационных взаимодействий, смысл имеет лишь *разность* энергий тех или иных состояний. Так, говоря об энергии связи атома водорода, мы имеем в виду разность двух величин: суммарной энергии покоя свободных протона и электрона, с одной стороны, и энергии покоя атома, с другой. Именно эта разность энергий выделяется (передается рожденному фотону), когда электрон и протон соединяются в атом. Точно так же под энергией покоя протона мы на самом деле понимаем разность энергий состояния, в котором имеется протон, и состояния без протона — вакуума. Если бы не гравитационное взаимодействие, говорить об энергии вакуума было бы бессмысленно, ее просто не с чем было бы сравнивать.

Дело обстоит совершенно иначе, если мы интересуемся именно гравитационными взаимодействиями. Энергия вакуума, как и любая другая энергия, «весит», гравитирует. Вакуум — это состояние с наименьшей энергией (поэтому, кстати, энергию от него отобразить нельзя), однако эта энергия совершенно не обязана быть равной нулю; с теоретической точки зрения, она может быть как положительной, так и отрицательной. Можно ли ее вычислить «из первых принципов» — большой вопрос. Но в любом случае энергия вакуума, если она положительна, имеет как раз те свойства, которыми должна обладать темная энергия. Действительно, вакуум везде одинаков (по крайней мере, в видимой части Вселенной). Предположение об обратном привело бы к противоречиям, например с наблю-

дениями реликтового излучения: в разных вакуумах свойства космической плазмы в эпоху последнего излучения фотонов были бы сильно разными, сильно различались бы и температуры излученных фотонов. Имелись бы и другие непреодолимые противоречия с наблюдениями. Итак, вакуум везде одинаков. Одинакова и его плотность энергии. Вакуум не может быть где-то более «густым», а где-то более «разреженным», иначе это был бы не вакуум. Стало быть, как и требуется для темной энергии, энергия вакуума распределена равномерно по Вселенной.

Далее, при сравнительно медленном расширении Вселенной (а именно так обстоит дело сейчас и обстоит в обозримом прошлом) вакуум остается одним и тем же. Свойства вакуума определяются физикой сверхмалых расстояний и времен, и на них медленное расширение Вселенной не отражается. Поэтому опять-таки, как и требуется, плотность энергии вакуума не зависит от времени. Как мы уже говорили, в общей теории относительности последнее свойство автоматически означает, что энергия вакуума приводит к ускоренному расширению Вселенной. Таким образом, вакуум — это в самом деле подходящий кандидат на роль носителя темной энергии.

Подчеркнем, что отсутствие зависимости плотности энергии от положения в пространстве и от времени — это точные, а не приближенные свойства вакуума, что отличает его от других кандидатов на роль темной энергии. Плотность энергии вакуума — это мировая константа (по крайней мере в той части Вселенной, которую мы наблюдаем).

Почему же представление о темной энергии как энергии вакуума не удовлетворяет многих физиков? Это связано с несуразно малым значением плотности энергии вакуума, которое необходимо для согласия теории и наблюдений.

В вакууме все время рождаются и умирают виртуальные частицы, в нем имеются конденсаты полей — в общем, вакуум скорее похож на сложную среду, чем на абсолютную пустоту. Это не просто домыслы: особенности вакуума находят свое проявление в свойствах элементарных частиц и их взаимодействиях и в конечном итоге определяются, хотя и косвенно, из многочисленных экспериментов. Энергия вакуума в принципе должна была бы «знать» о том, как он устроен, какова его структура и каковы значения характеризующих его параметров (например, конденсатов полей).

Теперь представим себе теоретика, который изучил физику элементарных частиц, но ничего не слышал о Вселенной. Попросим этого теоретика предсказать плотность энергии вакуума. Исходя из масштабов энергий, характерных для фундаментальных взаимодействий, и соответствующих масштабов длин, он сделает свою оценку — и ошибется в невообразимое число раз. Мы уже говорили об этом: энергетический масштаб фундаментальных взаимодействий — по крайней мере 200 миллионов электронвольт, а требуемый из наблюдений масштаб, соответствующий энергии вакуума (если темная энергия — это энергия вакуума) — 0,002 электронвольта.

Если темная энергия – это энергия вакуума, то попытаться понять, почему она имеет столь малую величину, можно, следуя, скажем, такой логике. Представим себе, что Вселенная чрезвычайно велика, что она во много раз больше, чем наблюдаемая нами часть. Допустим далее, что в разных весьма обширных частях Вселенной могут реализовываться самые разные вакуумные состояния с самой разной плотностью энергии. Такая возможность, к слову, теоретически не исключена. Области Вселенной, где плотность энергии вакуума слишком велика по абсолютной величине, выглядят совершенно не похоже на нашу область: там, где энергия вакуума велика и положительна, пространство расширяется настолько быстро, что звезды и галактики просто не успевают образоваться; в областях с большой отрицательной энергией вакуума расширение пространства быстро сменяется сжатием, и эти области коллапсируют задолго до образования звезд. В обоих случаях космологическая эволюция несовместима с существованием наблюдателей, подобных нам. И наоборот, мы могли появиться только там, где плотность энергии вакуума очень близка к нулю, – мы там и появились. Здесь напрашивается аналогия с другим, вполне очевидным фактом: мы существуем на планете Земля, более или менее подходящей для жизни, а не в произвольном месте во Вселенной, где условий для жизни нет вовсе.

Такой, как говорят, антропный взгляд на проблему энергии вакуума высказывался более 20 лет назад (в работах А. Линде и С. Вайнберга). Сейчас он популярен среди заметной части физиков-теоретиков. Другая часть воспринимает его как способ уйти от вопроса о том, какие физические причины на самом деле обуславливают столь малую наблюдаемую энергию вакуума и не является ли природа темной энергии совсем другой. Наиболее взвешенный подход, наверное, состоит в том, чтобы не исключать антропного объяснения как возможного конечного ответа, но попытаться все же найти альтернативное решение проблем энергии вакуума и темной энергии.

#### Легкое поле

Альтернативой вакууму как носителю темной энергии может служить какое-то новое поле, «разлитое» во Вселенной. В этом варианте энергия нового поля и является темной энергией. Новым это поле должно быть потому, что присутствие всюду во Вселенной известных полей (например, электромагнитного) слишком сильно влияло бы на поведение вещества и приводило бы к эффектам, которые давно были бы обнаружены. Кроме того, известные поля таковы, что их энергия не обладает перечисленными выше свойствами темной энергии.

Гипотетическое новое поле должно характеризоваться энергетическим масштабом 0,002 электронвольта. Хотя это очень малый масштаб, с точки зрения известных взаимодействий, он не выглядит совершенно неправдоподобным. Действительно, мы уже знаем, что масштабы разных взаимодействий сильно различаются между собой. Так, упоминавшийся масштаб сильных

взаимодействий (200 миллионов электронвольт) в  $10^{19}$  раз меньше масштаба гравитационных сил. Такое гигантское различие, конечно, само по себе требует объяснения, но это отдельный вопрос. В любом случае существование в природе разных энергетических масштабов – это факт, и введение нового малого масштаба непреодолимым препятствием не выглядит.

Новое поле, вообще говоря, изменяется в процессе эволюции Вселенной. Изменяется и его плотность энергии. Чтобы это изменение было не слишком быстрым, кванты нового поля – новые частицы – должны иметь чрезвычайно малую массу; говорят, что это поле должно быть легким.

Наконец, новое поле – это новая сила (так же, как гравитационное поле соответствует гравитационным, а электромагнитное – электрическим и магнитным силам). Легкое поле с чрезвычайно малой массой – это сила с большим радиусом действия, подобная гравитации. Чтобы не было противоречия с экспериментами по проверке общей теории относительности, взаимодействие этого поля с обычным веществом должно быть очень слабым, слабее гравитационного.

Все эти свойства не выглядят для теоретика привлекательными, но с ними можно смириться. Важно, что гипотеза о новом поле хотя бы в принципе допускает экспериментальную проверку. Во-первых, в результате более точных измерений темпа расширения Вселенной на современном этапе и в прошлом может выясниться, что плотность темной энергии меняется с течением времени. Это однозначно отметит гипотезу о вакуумной природе темной энергии и, наоборот, послужит указанием на существование во Вселенной нового легкого поля. Во-вторых, в перспективе можно надеяться обнаружить неоднородность распределения темной энергии в пространстве. Это стало бы окончательным доказательством того, что темная энергия – это энергия нового поля, а не что-нибудь еще.

С другой стороны, сегодня не видно способов зарегистрировать новое легкое поле в лабораторных экспериментах (на ускорителях и т.п.). Причина – чрезвычайно слабое взаимодействие этого поля с веществом. Такой пессимизм, впрочем, может носить временный характер: мы слишком мало знаем о новом поле, чтобы полностью исключить возможность его прямого экспериментального изучения в будущем. Никогда не говори «никогда».

Физики обсуждают разные типы гипотетических легких полей, энергия которых могла бы выступать в качестве темной энергии. В наиболее простом, с теоретической точки зрения, варианте плотность энергии нового поля *убывает* со временем. Для поля такого типа употребляют термин «квинтэссенция» (иногда используют и термин «космон»). Не исключена, однако, и обратная возможность, когда плотность энергии *растет* со временем; поле такого типа называют «фантомом». Фантом был бы весьма экзотическим полем; ничего подобного до сих пор в природе не встречалось. Различие между квинтэссенцией и фантомом, как мы обсудим ниже, важно с точки зрения удаленного *будущего* Вселенной.



### Новая гравитация

Наконец, еще одно возможное объяснение темной энергии состоит в том, что никакой темной энергии на самом деле нет. Темную энергию приходится привлекать для объяснения особенностей расширения Вселенной в том случае, если космологическая эволюция описывается общей теорией относительности. Если же эта теория неприменима на современных космологических масштабах длин и времен, то и в темной энергии нет необходимости.

Разумеется, при таком взгляде на темную энергию нельзя не учитывать тот факт, что общая теория относительности хорошо проверена на меньших масштабах расстояний. Поэтому нужно создать новую теорию гравитации, которая переходила бы в общую теорию относительности на сравнительно небольших расстояниях, но иначе описывала бы эволюцию Вселенной на поздних, близких к нашей, стадиях. Это трудная задача, особенно если учесть требование самосогласованности, внутренней непротиворечивости теории. Тем не менее, такие попытки делаются, и некоторые из них выглядят довольно перспективными.

Одна из возможностей состоит в том, чтобы перестать считать ньютоновскую постоянную всемирного тяготения постоянной величиной, разрешить ей меняться в пространстве и во времени, подчиняясь определенным уравнениям. К сожалению, наиболее красивые версии теории, реализующие эту возможность, отвергнуты экспериментами по проверке общей теории относительности. Если же за красотой не гнаться, то модели, объясняющие ускоренное расширение Вселенной и согласующиеся со всем, что известно про гравитацию, построить на этом пути можно. Такие модели, как правило, предсказывают отклонения от общей теории относительности, которые хотя и малы, но в перспективе могут быть экспериментально обнаружимы.

Отметим еще идею о том, что наше пространство может иметь больше трех измерений, при этом дополнительные измерения на обычных расстояниях ничем себя не проявляют. В то же время на космологических расстояниях в миллиарды световых лет силовые линии гравитационного поля могут «расползаться» в дополнительные измерения, отчего гравитация не будет больше описываться законом Ньютона. Может измениться и закон расширения Вселенной. Вполне удовлетворительной теории, объясняющей таким образом ускоренное расширение Вселенной, до сих пор не построено; в предложенных к настоящему времени моделях эта идея реализована лишь отчасти. Замечательно, тем не менее, что эти модели приводят к предсказаниям, проверяемым экспериментом. Среди них – возможность изменения гравитационного закона Ньютона на *малых* расстояниях; малые, но обнаружимые поправки к общей теории относительности в Солнечной системе и так далее.

Итак, открытые недавно особенности расширения Вселенной поставили новый вопрос: обязаны ли они энергии вакуума, энергии нового легкого поля или новой гравитации на сверхбольших расстояниях? Теоретическое изучение этих возможностей в самом разга-

ре, а ответ, как обычно в физике, в конечном итоге должны дать новые эксперименты.

### Темная энергия и будущее Вселенной

С открытием темной энергии сильно изменились представления о том, каким может быть отдаленное будущее нашей Вселенной. До этого открытия вопрос о будущем однозначно связывался с вопросом о кривизне трехмерного пространства. Если бы, как многие раньше считали, кривизна пространства на  $2/3$  определяла современный темп расширения Вселенной, а темная энергия отсутствовала, то Вселенная расширялась бы неограниченно, постепенно замедляясь. Теперь же понятно, что будущее определяется свойствами темной энергии. Поскольку мы эти свойства знаем сейчас плохо, предсказать будущее мы пока не можем. Можно только рассмотреть разные варианты. Про то, что происходит в теориях с новой гравитацией, сказать трудно, но другие сценарии возможно обсудить уже сейчас.

Если темная энергия постоянна во времени, как в случае энергии вакуума, то Вселенная будет всегда испытывать ускоренное расширение. Большинство галактик в конце концов удалятся от нашей на громадное расстояние, и наша Галактика вместе с немногими соседями окажется островком в пустоте. Если темная энергия – квинтэссенция, то в далеком будущем ускоренное расширение может прекратиться и даже смениться сжатием. В последнем случае вещество во Вселенной вернется в горячее и плотное состояние, произойдет «Большой взрыв наоборот», назад во времени.

Еще более драматическая судьба ожидает Вселенную, если темная энергия – фантом, причем такой, что его плотность энергии возрастает неограниченно. Расширение Вселенной будет все более и более быстрым, оно настолько ускорится, что галактики будут вырваны из скоплений, звезды – из галактик, планеты – из Солнечной системы. Дело дойдет до того, что электроны оторвутся от атомов, а атомные ядра разделятся на протоны и нейтроны. Произойдет, как говорят, большой разрыв.

Такой сценарий, однако, представляется не очень вероятным. Скорее всего, плотность энергии фантома будет оставаться ограниченной. Но и тогда Вселенную может ожидать необычное будущее. Дело в том, что во многих теориях фантомное поведение – рост плотности энергии со временем – сопровождается неустойчивостями фантомного поля. В таком случае фантомное поле во Вселенной будет становиться сильно неоднородным, плотность его энергии в разных частях Вселенной будет разной, какие-то части будут быстро расширяться, а какие-то, возможно, испытают коллапс. Судьба нашей Галактики будет зависеть от того, в какую область она попадет.

Все это, впрочем, относится к будущему, отдаленному даже по космологическим меркам. В ближайшие 20 миллиардов лет Вселенная будет оставаться почти такой же, как сейчас. У нас есть время для того, чтобы разобраться в свойствах темной энергии и тем самым более определенно предсказать будущее, а может быть, и повлиять на него.



В июне этого года безвременно скончался Дмитрий Германович Фон-Дер-Флаасс (1962 – 2010), замечательный математик и педагог, светлый и обаятельный человек. Наши читатели не раз встречали это имя – журнал «Квант» часто публиковал его задачи. Дмитрий Германович успешно работал в большой науке, но это была лишь часть его деятельности. Вторую составляли математические олимпиады школьников: он работал в жюри Всесоюзных и Всероссийских олимпиад, а в последние годы – и Международных. Читал лекции в различных математических лагерях и школах, был одним из тренеров нашей команды на Международной математической олимпиаде.

Мы предлагаем вашему вниманию запись (с небольшими сокращениями и с сохранением авторского стиля) лекции, прочитанной Д. Фон-Дер-Флаассом во Всероссийском детском центре «Орленок» в 2009 году.

# Теоремы софиста Горгия и современная математика

**Д. ФОН-ДЕР-ФЛАСС**

**Б**ЫЛ ТАКОЙ АНТИЧНЫЙ СОФИСТ ГОРГИЙ. ЗНАменит он тем, что сформулировал три теоремы. Первая теорема звучит так: ничто в мире не существует. Вторая теорема: а ежели что и существует, то непознаваемо для человека. Третья теорема: а ежели все-таки что-то познаваемо, то непередаваемо ближнему.

Другими словами, нет ничего, а ежели что-то есть, то мы об этом ничего не узнаем, а ежели даже что-то и узнаем, рассказать никому не сможем.

Я добавил бы к этим трем теоремам еще четвертую: если даже мы и сможем что-то рассказать, то никто не заинтересуется.

И вот эти четыре теоремы – это, собственно говоря, основные проблемы современной математики.

## Первая теорема Горгия

Начнем с первой – ничто в мире не существует, или, в переводе на язык математики, математика занимается непонятно чем. В некотором смысле это действительно так. Ведь математических объектов в мире не существует. Самое простое, с чего все начинается и чем математики все время пользуются, – это натуральные числа. Что такое натуральные числа, все мы знаем – это 1, 2, 3, 4 и так далее. И вот то, что мы все понимаем смысл слов «и так далее» – это большая загадка. Потому что «и так далее» означает, что чисел «бесконечно много». В нашем мире нет места для того, чтобы было бесконечно много чего-то. Но все мы уверены, что когда мы думаем о натуральных числах, мы все думаем об одном и том же. Если у меня после 7 следует 8, то и у вас после 7 будет следовать 8. Если у меня 19 – простое число, то у вас 19 будет простое число. Вот почему? Вроде бы в мире этого объекта нет, но мы о нем знаем и все знаем



*Дмитрий Германович Фон-Дер-Флаасс*

примерно одно и то же. Это, конечно, загадка не математическая, это загадка философская, и пусть философы ее обсуждают. Нам достаточно того, что, к счастью, мы все-таки имеем представление о математических объектах и оно одно и то же у всех, кто начинает о них задумываться. И поэтому математика возможна. Но большая философская проблема остается.

Если, как это принято у математиков, задуматься об этом всерьез, т.е. попытаться как-то строго об этом подумать, то тогда возникают проблемы, о которых я сейчас расскажу. Возникли они на памяти человечества совсем недавно, буквально в последнюю сотню лет.



но расписать до самых основ. Будет очень длинно и не читаемо, но тем не менее это в принципе возможно.

А дальше чем математики занимаются? Они доказывают разные свойства этих объектов. Чтобы что-то доказать, нужно уже что-то знать, какие-то первоначальные свойства всех этих объектов. И более того, математики должны быть полностью согласны насчет того, с каких первоначальных свойств начинать. Чтобы любой результат, полученный одним математиком, был принят всеми остальными.

Можно выписать несколько вот таких первоначальных свойств – они называются аксиомами, – и после этого из них доказывать все остальные свойства все более и более сложных математических объектов. Но вот уже с натуральными числами начинаются трудности. Аксиомы-то есть, и мы чувствуем интуитивно, что они верны, но оказывается, бывают такие утверждения про натуральные числа, которые из этих аксиом не выводятся, но которые, тем не менее, верны. Скажем, натуральные числа удовлетворяют некоторому свойству, но из тех аксиом, которые приняты за основные, оно получено быть не может.

Сразу возникает вопрос, а откуда мы знаем тогда, что это свойство верно для натуральных чисел? Если мы его не можем вот так взять и доказать? Трудный вопрос. Получается примерно так. Если обходиться только аксиомами натуральных чисел, то об очень многих вещах в принципе даже невозможно и говорить. Например, невозможно говорить о произвольных бесконечных подмножествах натуральных чисел. Тем не менее, люди представляют себе, что это такое, и в принципе интуитивно понимают, какими свойствами эти подмножества определяются. Поэтому про некоторые свойства натуральных чисел, которые из аксиом не выводимы, люди могли знать, что они верны. И вот, математик Курт Гёдель, видимо, был первым, кто в явном виде показал некое свойство натуральных чисел, которое интуитивно верно (т.е. против того, что оно верно, математики не возражают), но при этом оно не выводимо из тех аксиом натуральных чисел, которые тогда были приняты.

Частично, и на самом деле в очень большой степени (достаточной для большинства областей математики), с этой проблемой справились, аккуратно доведя все до множеств и выписав некоторый набор аксиом теории множеств, которые интуитивно очевидны и верность этих аксиом математиками, в общем-то, не оспаривается.



Курт Гёдель

Скажем, аксиома объединения. Если у нас есть набор каких-то множеств, то мы

можем сказать: а давайте образуем множество, которое содержит все элементы вот этих множеств из этого набора. Нет никаких разумных возражений против того, что такое множество существует. Есть и более хитрые аксиомы, с которыми проблем немножко больше. Мы сейчас рассмотрим три хитрые аксиомы в теории множеств, про которые в принципе могут возникнуть сомнения.

Например, есть такая аксиома. Допустим, что у нас есть множество каких-то элементов, и допустим, что по каждому из них мы можем однозначно определить значение некой функции на этом элементе. Аксиома говорит, что мы можем применить эту функцию к каждому элементу этого множества, и то, что получится, вместе снова будет образовывать множество (рис. 2). Самый простой пример: функция, переводящая  $x$  в  $x^2$ , ее мы умеем считать. Скажем, если у нас есть какой-то набор натуральных чисел, то мы можем каждое из них возвести в квадрат. Получится снова какой-то набор натуральных чисел. Такая интуитивно очевидная аксиома, согласны? Но вот, проблема в том, что эти функции могут быть

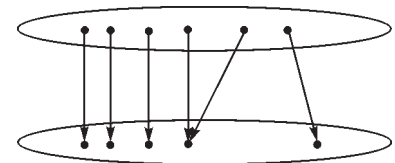


Рис. 2

определены очень сложным образом, множества могут быть очень большими. Бывает и такая ситуация: про нашу функцию мы умеем доказывать, что она однозначно определена, но сосчитать конкретное значение этой функции для каждого элемента множества – это чрезвычайно трудно или даже бесконечно трудно. Хотя мы знаем, что какой-то ответ уж точно есть, причем он однозначен. Даже в таких сложных ситуациях эта аксиома считается по-прежнему применимой, и как раз вот в таком самом общем виде она служит одним из источников проблем в теории множеств.

Вторая аксиома, которая, с одной стороны, очевидна, а с другой, приносит проблемы, – это аксиома взятия всех подмножеств данного множества. Она говорит, что если у нас какое-то множество есть, то у нас есть и множество, состоящее из всех подмножеств данного. Для конечных множеств это, разумеется, очевидно. Если у нас есть конечное множество из  $N$  элементов, то подмножеств у него будет всего  $2^N$ . В принципе мы их можем даже все выписать, если мы не очень ленивы. С самым простым бесконечным множеством, у нас проблем тоже нет. Смотрите: возьмем множество натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... и так далее. Почему нам очевидно, что семейство всех подмножеств множества натуральных чисел существует? Потому что мы знаем, что это за элементы. Как можно представить себе подмножество натуральных чисел? Давайте поставим единички у тех элементов, которые мы берем, а нолики – у тех, которые не берем, ну и так далее. Можно представить себе, что это бесконечная двоичная дробь (рис. 3). С точностью до маленьких

1 2 3 4 5 6 7 ...  
0,1 0 1 0 0 1 0 ...

Рис. 3

поправок (вроде того, что некоторые числа могут представляться двумя разными бесконечными двоичными дробями) оказывается, что действительные числа – это примерно то же самое, что подмножества натуральных чисел. И поскольку интуитивно мы знаем, что с действительными числами все в порядке, они есть, наглядно их можно представлять как непрерывную прямую, то в этом месте с нашей аксиомой о множестве всех подмножеств данного множества тоже все в порядке.

Если дальше подумать, то становится уже немножко боязно. Тем не менее, математики считают, что эта аксиома всегда выполняется: если у нас какое-то множество есть, то значит, есть и множество всех его подмножеств. Иначе очень трудно было бы некоторые конструкции проделать.

И еще одна аксиома, с которой было больше всего проблем, потому что в нее сначала не верили. Может быть, вы даже слышали ее название – аксиома выбора. Ее можно сформулировать многими разными способами, некоторыми – очень сложными, некоторыми – очень простыми. Я сейчас расскажу самый наглядный способ сформулировать аксиому выбора, при котором будет действительно очевидно, что она верна. Пусть у нас есть набор каких-то множеств. Они могут на самом деле быть и пересекающимися между собой, но это не важно – пусть для простоты они пока не пересекающиеся. Тогда мы можем построить произведение всех этих множеств. Что это означает? Элементами этого произведения будут вот такие штуки – мы из каждого возьмем по одному элементу и образуем из них всех одно множество (рис.4). Каж-

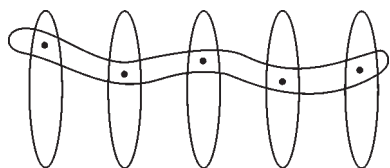


Рис. 4

дый способ выбрать по одному элементу из множества дает элемент произведения этих множеств.

Конечно, если среди этих множеств оказалось пустое, из которого выбрать нечего, то произведение их всех тоже будет пусто. А аксиома выбора утверждает такой совершенно очевидный факт – если все эти множества не пустые, то и произведение будет непустое. Согласно, что факт очевиден? И это, видимо, послужило, в конце концов, одним из самых сильных аргументов в пользу того, что действительно аксиома выбора верна. В других формулировках аксиома выбора звучит совсем не так очевидно, как в этой.

Наблюдения за тем, как математики доказывают свои утверждения, пытаясь перевести всю математику на язык теории множеств, показали, что во многих местах математики, сами того не замечая, эту аксиому используют. Как только это заметили, сразу стало понятно, что ее нужно выделить в отдельное утверждение – раз уж мы ее используем, то мы ее должны откуда-то взять. Либо мы должны ее доказать, либо мы должны объявить, что это базовый очевидный факт, который мы берем за аксиому и которым разрешаем пользоваться. Выяснилось, что это действительно базовый факт, что

доказать его, используя только все остальные факты, невозможно, опровергнуть его тоже невозможно, и поэтому если уж его принимать, то принимать именно как аксиому. А принимать, конечно, надо, потому что в такой форме он и вправду очевиден.

Тут и возникли большие проблемы, потому что как только этот факт в явном виде сформулировали и сказали «будем его использовать», математики тут же кинулись его использовать и, используя его, доказали большое количество совершенно интуитивно неочевидных утверждений. И даже, более того – утверждений, которые интуитивно кажутся неверными.

Вот самый наглядный пример такого утверждения, которое доказали с помощью аксиомы выбора: можно взять шар, разделить его на несколько кусков и сложить из этих кусков два точно таких же шара. Что здесь означает «разделить на несколько кусков», допустим, на 7? Это значит, что про каждую точку мы говорим, в какой из этих семи кусков она попадает. Но это не то, что разрезать шар ножиком – это может быть гораздо сложнее. Например, вот такой трудно представимый, но легко объяснимый способ разрезать шар на два куска. Давайте возьмем в один кусок все точки, у которых все координаты рациональные, а в другой кусок – все точки, у которых есть иррациональная координата. Про каждую точку мы знаем, в какой из кусков она попала, т.е. это законное разделение шара на два куска. Но наглядно это представить себе очень трудно. Каждый из этих кусков, если издали на него посмотреть, будет выглядеть как шар целиком. Хотя один из этих кусков будет на самом деле очень маленький, а другой – очень большой. Так вот, доказали с помощью аксиомы выбора, что шар можно так разрезать на 7 кусков, а потом эти куски немножко передвинуть (именно передвинуть в пространстве, не искорюживая никак, не искривляя) и собрать снова так, что получатся два шара, в точности таких же, как и тот, что был в самом начале. Это утверждение, хотя и доказано, звучит как-то дико. Но потом все-таки поняли, что лучше уж смириться с такими следствиями аксиомы выбора, чем вообще от нее отказываться. Иначе никак: либо мы отказываемся от аксиомы выбора, и тогда нам не удастся ее использовать вообще нигде, и очень многие важные красивые и интуитивно понятные математические результаты окажутся недоказуемыми. Либо мы ее берем – тогда все те результаты становятся благополучно доказуемыми, но заодно у нас появляются такие вот уродцы. Но люди ко многому привыкают, и к этим уродцам они тоже привыкли. В общем, с аксиомой выбора сейчас вроде проблем нет.

Получается так, что у нас есть набор аксиом для теории множеств, есть наша математика. И более-менее кажется, что все, что могут люди сделать в математике, может быть выражено на языке теории множеств. Но тут возникает та же самая проблема, которую в свое время обнаружил Гёдель в арифметике. Если у нас есть некий достаточно богатый набор аксиом, которые описывают наш мир множеств (который есть мир всей математики), обязательно найдутся утверждения, про которые мы никак не сможем узнать, верны они или

нет. Утверждения, которые из этих аксиом доказать мы не сможем, и опровергнуть тоже не сможем. Теория множеств сильно развивается, и сейчас она ближе всего к этой проблеме: часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда некоторые вопросы звучат вполне естественно, ответ на них получить хочется, но доказано, что ответа мы никогда не узнаем, потому что и тот ответ, и другой ответ из аксиом выведен быть не может.

Что делать? В теории множеств как-то пытаются с этим бороться, а именно, пытаются придумывать новые аксиомы, которые по какой-то причине все-таки можно еще добавить. Хотя, казалось бы, все, что человечеству интуитивно очевидно, уже сведено к тем аксиомам теории множеств, которые были выработаны в начале XX века. А теперь оказывается, что хочется все-таки еще чего-то. Математики тренируют свою интуицию дальше, чтобы какие-то новые утверждения друг показали почему-то всем математикам интуитивно очевидными, и тогда их можно было бы принять в качестве новых аксиом в надежде, что с их помощью ответы на какие-то из таких вопросов могут быть получены.

О том, как все это происходит, конечно, рассказать я не могу, там чрезвычайно сложные утверждения, и нужно очень глубоко вкопаться в теорию множеств, во-первых, для того, чтобы понять, что они утверждают, а во-вторых, чтобы понять, что эти утверждения действительно можно считать интуитивно очевидными и принять за аксиомы. Вот этим занимается сейчас одна из самых загадочных областей математики – теория множеств.

### Вторая теорема Горгия

Вторая теорема Горгия звучит так – если что и существует, то непознаваемо для человека. Сейчас я покажу несколько примеров утверждений, которые под эту категорию попадают.

С теорией множеств была проблема, имеем ли мы вообще право задавать вопросы вроде такого: «верна ли аксиома выбора?». Если мы хотим просто заниматься математикой, не вступая в противоречия, то мы в принципе можем и принять аксиому выбора, и принять, что она не верна. И в том и в другом случае мы сможем развивать математику, получая одни результаты в одном случае, другие – в другом, но никогда не придем к противоречию.

А вот теперь другая ситуация. Есть, видимо, результаты, ответ на которые очевидно существует, и очевидно он однозначно определен, но человечество его, может быть, никогда не узнает. Самый простой пример – это так называемая  $(3N + 1)$ -проблема, о которой я сейчас расскажу. Возьмем любое натуральное число. Если оно четно, то разделим его пополам. А если оно нечетно, то умножим его на 3 и прибавим 1. С полученным числом сделаем то же самое, и так далее. Например, если мы начнем с тройки, получится

$$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Если мы начнем с семерки, немножко дольше будет продолжаться процесс. Уже начиная с некоторых

маленьких чисел эта цепочка может оказаться достаточно длинной, но все время она будет заканчиваться единицей. Есть гипотеза, что с какого бы числа мы ни начали, если мы будем такую цепочку строить, то всегда обязательно доберемся до 1. В этом и состоит  $(3N + 1)$ -проблема – верна ли эта гипотеза?

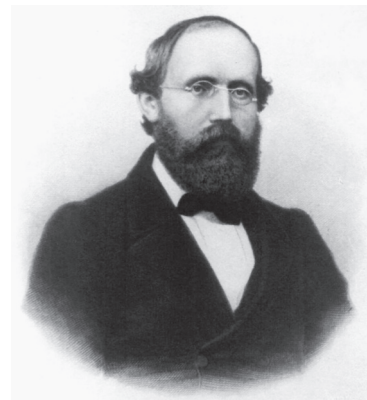
Мне кажется, что все нынешние математики верят, что она верна. И некоторые самые безрассудные даже пытаются ее доказать. Но ни у кого ничего не вышло. И не выходит уже много десятков лет. Так что это одна из привлекательных задач. Серьезные математики, конечно, относятся к ней свысока – просто как к забавной головоломке. Неизвестно, что там будет, да и кому нужно знать, что там будет. Но несерьезным математикам все-таки интересно, справедлива гипотеза или нет. И пока ее не доказали, совершенно все что угодно тут может произойти. Во-первых, очевидно, что у этого вопроса ответ однозначный: да или нет. Либо правда, что, начиная от любого натурального числа, мы сползем к единице, либо неправда. Интуитивно ясно, что тут уже ни от какого выбора аксиом, ни от какой воли человеческой ответ не зависит. Так вот, есть предположение, что человечество никогда не узнает ответ на этот вопрос.

Конечно, если кто-то докажет эту гипотезу, то тогда мы узнаем ответ. Но что значит докажет? Это значит, что он объяснит нам, по каким причинам любое натуральное число сходится к 1, и эти причины окажутся для нас понятными.

Может случиться, что кто-то докажет, что некоторое семидесятитрехзначное число обладает именно такими свойствами, что запустив от него эту цепочку, мы обязательно будем получать сколь угодно большие числа. Или докажет, что эта цепочка заикнется где-то в другом месте. Опять же, это будет причиной, почему гипотеза неверна.

А вот у меня, например, такой страшный кошмар: а что, если это утверждение верно, но без всякой на то причины? Верно, а причины, которую один человек может понять и объяснить другому, у этого утверждения нет вовсе. Тогда мы никогда не узнаем ответа. Потому что останется только перебрать все натуральные числа и для каждого проверить гипотезу. А это, естественно, вне наших сил. Закон сохранения энергии не позволяет проделать бесконечное количество операций за конечное время. Или конечность скорости света. В общем, физические законы не позволяют нам проделать бесконечное количество операций за конечное время и узнать результат.

Очень многие нерешенные задачи как раз относятся именно к этой области, т.е. в принципе их очень



Бернхард Риман

хотят решить. Некоторые из них скорее всего решат. Вы все наверняка слышали название «гипотеза Римана». Может быть кто-нибудь из вас даже смутно понимает, что эта гипотеза гласит. Я лично понимаю очень смутно. Но с гипотезой Римана, по крайней мере, более менее ясно, что она верна. Все математики в нее верят, и, я надеюсь, ее докажут в ближайшее время. А есть некоторые утверждения, которые никто не может пока ни доказать, ни опровергнуть, и даже в гипотезе нет уверенности, какой из двух ответов верен. Возможно, что на какие-нибудь из этих вопросов человечество в принципе никогда ответов не получит.

### Третья теорема Горгия

Третья теорема – ежели что-то и познаваемо, то непередаваемо ближнему. Тут как раз самые жгучие проблемы у современной математики и самые, может быть, муссируемые. Человек что-то доказал, но рассказать это доказательство другому человеку он не способен. Или убедить другого человека в том, что он действительно это доказал. Так бывает. Самый первый пример из этой области и самый известный публике – это проблема четырех красок. Но это еще не самая тяжелая ситуация, которая здесь возникает. Я сейчас скажу немножко про проблему четырех красок, а потом покажу ситуации более безумные.

Что такое проблема четырех красок? Это вопрос из теории графов. Граф – это просто некоторые вершины, которые могут быть соединены между собой ребрами. Если мы эти вершины сможем нарисовать на плоскости, и ребрами соединить так, чтобы ребра между собой не пересекались, получится граф, который называется плоским. Что такое раскраска графа? Мы красим его вершины в разные цвета. Если мы это сделали так, что

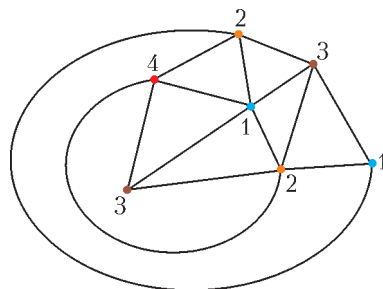


Рис. 5

соседние по ребру вершины всегда разного цвета, раскраска называется правильной. Хочется правильно покрасить граф, используя как можно меньше различных цветов. Вот, например, на рисунке 5 у нас есть три вершины, которые попарно соединены – значит, никуда не денешься, эти вершины будут обязательно иметь три разных цвета. Но вообще для покраски этого графа хватает четырех цветов (а трех не хватает, можете проверить).

Сто лет стояла проблема: правда ли, что любой граф, который можно нарисовать на плоскости, можно раскрасить в четыре цвета? Кто-то верил и пытался доказать, что четырех цветов всегда хватит, кто-то не верил и пытался придумать пример, когда четырех цветов не хватит. Еще была такая неприятность: проблема очень легко формулируется. Поэтому многие люди, даже несерьезные математики, накинулись на нее и стали пытаться ее доказывать. И предъявляли огромное количество якобы доказательств или якобы

опровержений. Посылали их математикам, кричали в газетах: «Ура! Я доказал проблему четырех красок!» – и даже выпускали книжки с ошибочными доказательствами. Словом, большой был шум.

В конце концов ее доказали К.Аппель и В.Хакен. Схему доказательства я вам сейчас примерно опишу. И заодно мы увидим, почему это доказательство непередаваемо другим. Начали люди с того, что всерьез стали изучать, как устроены плоские графы. Они предъявили список из нескольких десятков конфигураций и доказали, что в каждом плоском графе какая-то из этих конфигураций обязательно найдется. Это первая половина доказательства. А вторая половина доказательства – для каждой из этих конфигураций можно проверить, что если она в нашем графе есть, то его удастся раскрасить в четыре цвета.

Более точно, дальше доказательство идет от противного. Предположим, что наш граф нельзя раскрасить в четыре цвета. Из первой половины мы знаем, что в нем есть какая-то конфигурация из списка. После этого для каждой из этих конфигураций проводится такое рассуждение. Предположим, что наш граф содержит эту конфигурацию. Выкинем ее. По индукции, то, что осталось, в четыре цвета красится. И проверяем, что как бы мы ни раскрасили оставшееся в четыре цвета, вот эту самую конфигурацию докрасить нам удастся.

Самый простой пример докрашиваемой конфигурации – вершина, которая соединена всего с тремя другими. Понятно, что если в нашем графе есть такая вершина, то мы можем оставить раскрашивание ее напоследок. Раскрасим все остальное, а потом посмотрим, к каким цветам присоединена эта вершина, и выберем четвертый. Для других конфигураций рассуждения аналогичные, но более сложные.

Теперь, как все это было проделано? Проверить, что каждая из такого большого количества конфигураций всегда докрашивается, руками невозможно – надо слишком много времени. И вот эту проверку поручили компьютеру. А он, перебрав большое количество случаев, действительно проверил, что это так. В результате появилось доказательство проблемы четырех красок.

Первоначально выглядело оно вот как. Человеческая часть рассуждения, записанная в толстой книге, и к ней прилагались фразы, что окончательная проверка того, что все раскрашивается, была поручена компьютеру, и даже текст компьютерной программы приводился. Эта программа все просчитала и все проверила – действительно, все нормально, и значит, теорема четырех красок доказана.

Тут же поднялся шум – можно ли такому доказательству верить. Ведь большая часть доказательства проведена компьютером, а не человеком. «А вдруг компьютер ошибся?» – говорили такие недалекие люди.

И проблемы с этим доказательством действительно начались, но они оказались не в компьютерной части, а в человеческой. В доказательстве были найдены недочеты. Понятно, что такой длины текст, содержащий сложные переборы, конечно, может содержать ошибки. Ошибки эти были найдены, но, к счастью, их удалось исправить.

Осталась компьютерная часть, которую с тех пор уже тоже проверили не на одном компьютере, переписывая даже программы, просто проделав тот же перебор. Ведь если сказано, что именно следует перебирать, то каждый может написать свою программу и проверить, что результат будет такой, как надо. И мне, например, кажется, что использование таких вот больших компьютерных переборов в доказательстве – это как раз не проблема. Почему? А вот по той же причине, которая на примере проблемы четырех красок уже проявилась – что к компьютерным доказательствам доверия гораздо больше, чем к человеческим, а не меньше. Кричали, что компьютер – это же машина, а вдруг она где-то сломалась, сбилась, что-то там неправильно посчитала... А вот этого как раз быть не может. Потому что если компьютер случайно где-то засбоил, и произошла ошибка – нолик случайно заменился на единичку, – это не приведет к неверному результату. Это приведет к отсутствию результата, просто программа в конце концов сломается. Какая типичная операция, которую компьютер выполняет? Взяли из такого-то регистра такое-то число и передали по нему управление туда-то. Естественно, что если в этом числе произошло изменение в один бит, управление передано вообще неизвестно куда, там написаны какие-то команды, которые очень скоро просто все разрушат.

Может быть, конечно, ошибка в написании программы для компьютера, но это уже человеческая ошибка. Человек может прочитать программу и проверить, правильная она или нет. Так же человек может прочитать чужое доказательство и проверить, правильное оно или нет. Но у человека гораздо больше шансов ошибиться, чем у компьютера. Если вы читаете чужое достаточно длинное доказательство, и в нем есть ошибка, то есть все шансы, что вы ее не заметите. Почему? В первую очередь потому, что раз сам автор доказательства сделал эту ошибку – значит, она психологически обоснована. То есть, он не просто так ее сделал, по случайности – это в принципе такое место, где типичный человек может сделать такую ошибку. Значит, и вы можете сделать ту же самую ошибку, читая это место и соответственно ее не заметив. Поэтому проверка человеком, человеческого же доказательства – это гораздо менее надежный способ проверки, чем проверка результата работы компьютерной программы с помощью запуска ее еще раз на какой-то другой машине. Второе практически гарантирует, что все нормально, а первое – это как повезло.

И вот с этой проблемой – найти ошибку в записанном людьми математическом тексте, – становится все труднее, а иногда и вообще невозможно – это серьезная проблема современной математики. С ней нужно бороться. Как – сейчас пока никто не знает. А проблема большая и всерьез возникла именно сейчас – тому несколько примеров существует. Вот, возможно, менее известный, но один из самых современных. Это старинная гипотеза Кеплера. Говорит она об укладывании шариков в трехмерном пространстве.

Давайте сначала посмотрим, что происходит в двумерном пространстве, т.е. на плоскости. Пусть у нас

есть одинаковые кружочки. Как плотнее всего нарисовать их на плоскости, чтобы они не пересекались? Есть ответ – надо поместить центры кружков в узлы шестиугольной решетки. Это утверждение не совсем тривиальное, но легкое.

А в трехмерном пространстве как бы вы стали плотно упаковывать шарики? Сначала разложим на плоскости шарики так, как показано на рисунке 6. Потом сверху положим еще один такой же слой, вдавливая до упора, как показано на рисунке 7.

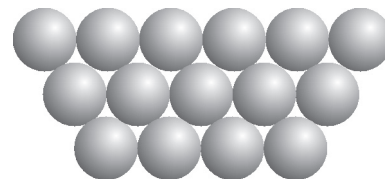


Рис. 6

Потом сверху еще один такой же слой, и так далее. Интуитивно очевидно, что это и есть самый плотный способ уложить шарики в трехмерном пространстве. Кеплер утверждал (и, похоже, первым сформулировал), что эта упаковка должна быть самой плотной упаковкой в трехмерном пространстве.

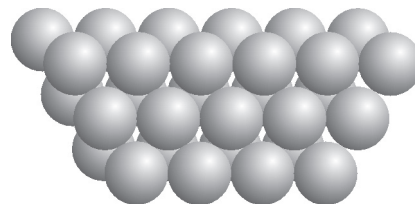


Рис. 7

Произошло это в XVII веке, с тех пор эта гипотеза и стоит. В начале XXI века появилось ее доказательство. И любой из вас может его достать и прочитать. Оно в открытом доступе лежит в Интернете. Это статья в двести с чем-то страниц. Она написана каким-то одним человеком, и тоже содержит как некоторые чисто математические рассуждения, так и компьютерный счет.

Сначала автор математическими рассуждениями пытается свести задачу к проверке конечного числа случаев. После этого, иногда используя компьютер, он это конечное, но очень большое число случаев проверяет, все сходится, и – ура! – гипотеза Кеплера доказана. И вот проблема с этой статьей – ее никто не может прочитать. Потому что она тяжелая, потому что местами не совсем понятно, что перебор действительно полный, потому что просто скучно ее читать. Двести страниц скучных вычислений. Человек ее прочитать не в силах.

Вообще говоря, все верят, что эта статья содержит доказательство этой теоремы. Но с другой стороны, никто до сих пор не проверил это честно, в частности, эта статья не опубликована ни в одном рецензируемом журнале, т.е. никакой уважающий себя математик не готов поставить подпись под ут-



Иоганн Кеплер



верждением, что «да, все верно, и гипотеза Кеплера доказана».

И это не единственная ситуация, и в других областях математики такое тоже встречается. Совсем недавно я напоролся на список нерешенных проблем в теории множеств, в теории моделей, в разных областях. И вот к одной гипотезе там комментарии такие: она якобы опровергнута в статье вот такой-то, но никто в это не верит.

Вот такая ситуация. Человек доказал утверждение, но передать это другому, рассказать это другому он не в силах.

Самый страшный пример – это, конечно, классификация конечных простых групп. Я не буду формулировать точно, что это такое, что такое группы, что такое конечные группы, если захотите – узнаете сами. Конечные группы все в некотором смысле собираются из простых блоков, которые называются простыми группами, а те уже нельзя разобрать на более мелкие блоки. Этих конечных простых групп бесконечно много. Полный их список выглядит так: это семнадцать бесконечных серий, к которым еще в конце добавлены 26 отдельных групп, которые построены каким-то отдельным способом и ни в какую серию не входят. Утверждается, что этот список содержит все конечные простые группы. Задача страшно нужная для математики. Поэтому в 70-е годы, когда появились некоторые особенные идеи и надежды на ее решение, на задачу накинудись несколько сот математиков из разных стран, из разных институтов, каждый брался за свой кусочек. Были и, так сказать, архитекторы этого проекта, которые примерно представляли, как все это вместе потом будет собрано в единое доказательство. Понятно, что люди торопились, конкурировали. В результате, кусочки, которые они делали – это в совокупности около 10000 журнальных страниц, и это только то, что опубликовано. А есть еще и статьи, которые существовали или в виде препринтов, или в виде машинописных копий. Я сам одну такую статью читал в свое время, она так никогда и не была опубликована, хотя включает в себя заметный кусочек этого полного доказательства. И вот эти 10000 страниц разбросаны в разных журналах, написаны разными людьми, с разной степенью понятности, и обычному математику, не связанному с этим и не являющемуся одним из архитекторов этой теории, мало того что невозможно прочитать все 10000 страниц, так еще и очень трудно понять само устройство доказательства. К тому же с тех пор некоторые из этих архитекторов просто умерли.

Объявили, что классификация завершена, хоть доказательство и существует лишь в виде текста, который никто прочитать не может, и это привело к следующей неприятности. Новые математики с меньшей охотой стали идти в теорию конечных групп. Все меньше и меньше людей этим занимается. И вполне может случиться, что через 50 лет уже вообще на Земле не найдется человека, который будет способен что-то понять в этом доказательстве. Будут ходить легенды: наши великие предки умели доказывать, что все конеч-

ные простые группы перечислены вот в этом списке, и что других нет, но сейчас это знание утеряно. Вполне реалистичная ситуация. Но, к счастью, не один я считаю эту ситуацию реалистичной, поэтому с ней борются, и я слышал, что даже организовали специальный проект «Философские и математические проблемы, связанные с доказательством классификации конечных простых групп». Есть люди, которые пытаются это доказательство привести к читаемому виду, и, может быть, когда-нибудь это действительно получится. Есть люди, которые пытаются разобраться, что же делать со всеми этими трудностями. Человечество помнит об этой задаче, и, значит, оно с ней в конце концов справится. Но тем не менее вполне может быть, что будут появляться другие такие же сложные теоремы, которые могут быть доказаны, но доказательство которых никто не способен прочитать, никто не способен никому рассказать.

#### Четвертая теорема

Ну и теперь четвертая теорема, о которой я немного расскажу, может быть даже самая страшная – «ежели даже и сможет рассказать, то никто не заинтересуется». Некий осколок от этой проблемы уже прозвучал. Людям перестало интересно заниматься конечными группами. Все меньше и меньше людей этим занимаются, и масса знаний, которая сохранилась в виде текстов, уже никому не нужна, ее никто не умеет читать. Это тоже беда, которая грозит многим областям математики.

Понятно, что некоторым областям математики везет. Например, та же самая теория графов и комбинаторика. Чтобы серьезно начать ими заниматься, нужно знать совсем немного. Вы немножко узнали, порешали олимпиадные задачки, один шаг – и перед вами уже нерешенная проблема. Есть за что взяться – ура, беремся, интересно, занимаемся... Но есть области математики, в которых даже для того, чтобы почувствовать, что эта область действительно красива, и что ей хочется заниматься, нужно очень многое узнать. И при этом по дороге еще много другого красивого узнаешь. Но тебя не должны эти красоты, встреченные по дороге, отвлекать, и в конце концов ты добираешься вот туда, в самые дебри, уже там видишь красоту, и уже тогда, узнав очень многое, становишься способен заниматься этой областью математики. И вот эта трудность – проблема для таких областей. Чтобы область математики развивалась, нужно, чтобы ею занимались. Достаточному числу людей это должно быть настолько интересно, чтобы они преодолели все трудности, забрались туда и уже после этого продолжили этим заниматься. И сейчас математика доходит до такого уровня сложности, что для многих областей именно это становится основной проблемой.

Как человечество со всеми этими проблемами будет справляться – я не знаю, но посмотреть будет интересно.

Вот, собственно, и все.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2011 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2191» или «Ф2198». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.info](mailto:math@kvant.info) и [phys@kvant.info](mailto:phys@kvant.info) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2191–M2198,а предлагались на заключительном этапе XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Задачи M2191–M2198, Ф2198–Ф2204

**M2191.** Дано натуральное  $n > 1$ . Докажите, что найдутся такие  $n$  последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие  $2n + 1$ , и не делится ни на одно другое простое число.

*И.Богданов*

**M2192.** Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $K$ , лежащая на биссектрисе угла  $BAC$ . Прямая  $СК$  вторично пересекает окружность  $\omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $M$ . Окружность  $\Omega$  проходит через точку  $A$ , касается прямой  $СМ$  в точке  $K$  и пересекает вторично отрезок  $AB$  в точке  $P$ , а окружность  $\omega$  – в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $P$ ,  $Q$  и  $M$  лежат на одной прямой.

*Л.Емельянов*

**M2193.** В каждой клетке квадрата  $100 \times 100$  записано некоторое натуральное число. Прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки, назовем *хорошим*, если сумма чисел во всех его клетках делится на 17. Разрешается одновременно закрашивать все клетки в некотором хорошем прямоугольнике. Одну клетку запрещается закрашивать дважды. При каком наибольшем  $d$  можно закрасить хотя бы  $d$  клеток при любом расположении чисел?

*П.Зусманович, Ф.Петров*

**M2194.** В буфете лежат 100 яблок суммарной массой 10 кг, каждое массой не меньше 25 г. Буфетчице нужно разрезать их на части и раздать 100 детям, каждому по 100 г. Докажите, что она может это сделать так, чтобы масса любого куса яблока была не меньше 25 г.

*К.Кноп, И.Богданов*

**M2195.** Даны  $n \geq 3$  попарно взаимно простых чисел. Известно, что при делении произведения любых  $n - 1$  из них на оставшееся число получается один и тот же остаток  $r$ . Докажите, что  $r \leq n - 2$ .

*В.Сендеров*

**M2196.** Могут ли 4 центра вписанных в грани тетраэдра окружностей лежать в одной плоскости?

*И.Богданов, О.Подлипский*

**M2197.** Многочлен  $P(x)$  степени  $n \geq 3$  имеет  $n$  вещественных корней  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , причем  $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \dots < x_n - x_{n-1}$ . Докажите, что максимум функции  $y = |P(x)|$  на отрезке  $[x_1; x_n]$  достигается в точке, принадлежащей отрезку  $[x_{n-1}; x_n]$ .

*И.Богданов*

**M2198\***. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$  с центром  $O$ , а его диагонали пересекаются в точке  $K$ . Точки  $M_1, M_2, M_3, M_4$  – середины дуг  $AB, BC, CD, DA$  (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки  $I_1, I_2, I_3, I_4$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABK, BCK, CDK, DAK$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4$  пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что точка пересечения прямых из пункта а) лежит на прямой  $OK$ .

*И.Богданов, П.Кожевников*

**Ф2198.** На гладком горизонтальном столе лежит плашмя тонкий обруч массой  $M$ . На его обод намотана легкая нерастяжимая нить, за свободный конец нити мы тянем с силой  $F$ , направленной по касательной к

обручу. С каким ускорением движется конец нити, за который мы тянем?

*А.Простов*

**Ф2199.** Тело, находящееся на наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, бросают горизонтально. Найдите, при каком угле  $\alpha$  траекторией тела будет периодическая кривая. Коэффициент трения тела о наклонную плоскость равен  $\mu$ .

*Ю.Радар*

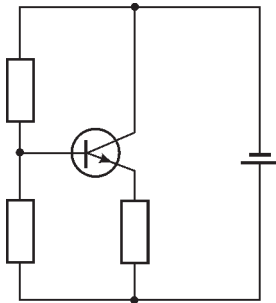
**Ф2200.** С порцией одноатомного газа проводят циклический процесс, состоящий из изотермического расширения в 9 раз, охлаждения в 3 раза при неизменном объеме и адиабатического сжатия до первоначального состояния (можете проверить – получается!). Найдите термодинамический КПД этого цикла

*Р.Циклов*

**Ф2201.** Из множества одинаковых вольтметров собрана обычная «бесконечная» цепь, подключенная к батарее. Первый из вольтметров показывает больше всех – его стрелка отклоняется почти на всю шкалу. Погрешность приборов составляет 1%. Сколько приборов показывают напряжения, превышающие порог погрешности?

*З.Рафаилов*

**Ф2202.** На рисунке приведена схема включения обычного транзистора. Напряжение батарейки равно 6 В. Сопротивления резисторов в цепи базы – по 100 кОм, в цепи эмиттера – 10 кОм. Потенциал вывода базы (относительно «минуса» батарейки) +2,7 В, потенциал эмиттера +2,1 В. Во сколько раз ток коллектора транзистора больше тока базы?



*Э.Базов*

**Ф2203.** Из одинаковых тонких проволочек спаяли кубик – проволочки являются его ребрами. К максимально удаленным двум вершинам кубика подключили источник, который обеспечивает протекание заданного тока во внешней цепи («источник тока»), и вычислили магнитную индукцию поля этих проволочек в центре кубика. Во сколько раз изменится это поле после перерезания одной из проволочек? При решении считайте, что токи остальных ребер после перерезания не меняются (вообще-то это неверно!).

*А.Кубиков*

**Ф2204.** Одна часть катушки индуктивности содержит 200 витков, намотанных на стержень из феррита – вещества с большой магнитной проницаемостью. В нашем случае это стержень длиной 10 см и диаметром 8 мм, магнитная проницаемость которого равна 1000 (бывает и в несколько раз больше или меньше, но так была устроена магнитная антенна моего первого радиоприемника). Длина намотки составляет 2 см. Вторая часть катушки содержит 20 витков, эта часть намотана на бумажный цилиндр, который можно передвигать

по ферритовому стержню, меняя расстояние между частями катушки. Части катушки соединяют последовательно. Оцените, во сколько раз можно изменять индуктивность, передвигая по стержню «малую» катушку.

*А.Зильберман*

**Решения задач M2169–M2175, Ф2175, Ф2176, Ф2182–Ф2188**

**M2169.** Каждая сторона остроугольного треугольника  $ABC$  меньше соответствующей стороны треугольника  $A'B'C'$ . Докажите, что  $R < R'$ , где  $R$  и  $R'$  – радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  соответственно.

Так как сумма углов любого треугольника равна  $180^\circ$ , все три неравенства  $\angle BAC > \angle B'A'C'$ ,  $\angle CBA > \angle C'B'A'$ ,  $\angle ACB > \angle A'C'B'$  не могут быть выполнены. Пусть для определенности  $\angle BAC \geq \angle B'A'C'$ . Тогда  $\sin \angle BAC \geq \sin \angle B'A'C'$ , поскольку  $\angle BAC$  острый. Так как  $BC < B'C'$ , то

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} < \frac{B'C'}{2 \sin \angle B'A'C'} = R'.$$

*Замечание.* Эту задачу можно обобщить. Пусть многоугольник  $M$ , вписанный в окружность радиуса  $R$ , таков, что центр окружности лежит внутри  $M$ . Тогда для вписанного многоугольника  $M'$ , полученного из  $M$  увеличением длин сторон, радиус описанной окружности больше  $R$ . Это утверждение, вообще говоря, неверно для произвольного вписанного многоугольника (скажем, утверждение задачи неверно для тупоугольного треугольника  $ABC$ ).

*П.Кожевников*

**M2170.** Окружность пересекает график функции  $y = x^3 - 2009x$  в шести точках. Найдите сумму абсцисс этих точек.

**Ответ:** 0.

Пусть  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$  – уравнение окружности. Подставив  $y = x^3 - 2009x$  в это уравнение, мы получим уравнение  $f(x) = 0$ , где  $f(x) = (x - a)^2 + (x^3 - 2009x - b)^2 - R^2 = 0$ . Уравнение  $f(x) = 0$  шестой степени, причем, как легко видеть, у многочлена  $f(x)$  коэффициент при  $x^6$  равен 1, а коэффициент при  $x^5$  равен 0. Уравнению  $f(x) = 0$  удовлетворяют абсциссы  $x_1, x_2, \dots, x_6$  шести точек пересечения графика с окружностью (различные точки графика имеют различные абсциссы, поэтому  $x_1, x_2, \dots, x_6$  различны), значит, многочлен  $f(x)$  раскладывается на множители:  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_6)$ . Исходя из этого разложения, получаем, что коэффициент при  $x^5$  равен  $-(x_1 + x_2 + \dots + x_6)$ .<sup>1</sup> С другой стороны, как мы уже знаем, этот коэффициент равен 0.

*И.Богданов*

<sup>1</sup> Фактически эти рассуждения повторяют доказательство теоремы Виета для многочлена.

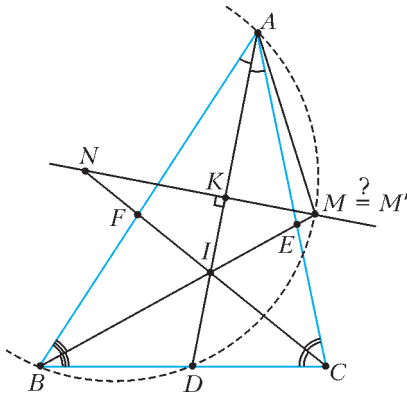
**M2171.** Можно ли разбить при каком-то натуральном  $k$  все натуральные числа от 1 до  $k$  на две группы и выписать числа в каждой группе в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

**Ответ:** нельзя.

Предположим противное. Ясно, что  $k \geq 10$ , так как в наборе цифр от 1 до 9 нет повторяющихся. Рассмотрим наибольшую степень десятки  $10^n$ , не превосходящую  $k$ . Последовательность цифр числа  $10^n$  целиком войдет в одно из составленных чисел. Но тогда такая же последовательность из единицы и  $n$  последующих нулей должна повториться во втором числе. Эта последовательность цифр не могла появиться из объединения двух или более чисел (так как натуральные числа не начинаются с нулей), значит, она содержалась в одном числе, отличном от  $10^n$ . Но наименьшее число, отличное от  $10^n$  и содержащее такой набор цифр, — это  $10^{n+1}$ . Мы получили противоречие с тем, что  $10^n$  —

максимальная степень десятки, не превосходящая  $k$ .

Н.Агаханов



**M2172.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ , пересекающиеся в точке  $I$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AD$  пересекает прямые  $BE$  и  $CF$  в точках  $M$  и  $N$ .

Докажите, что точки  $A$ ,  $I$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной окружности.

Для решения задачи достаточно установить, что  $\angle MAI = \angle MNI$  (см. рисунок). Пусть  $K$  — середина отрезка  $AD$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \angle MNI &= \angle KNI = \\ &= 90^\circ - \angle KIN = 90^\circ - (\angle ACI + \angle CAI) = \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - (\angle ACB + \angle BAC)) = \frac{1}{2} \angle ABC. \end{aligned}$$

Остается установить, что  $\angle MAI = \frac{1}{2} \angle ABC$ . Пусть  $M'$  — точка пересечения окружности, описанной около треугольника  $ABD$ , с серединным перпендикуляром к отрезку  $AD$  (точка  $M'$  лежит на дуге  $AD$ , не содержащей точку  $B$ ). Тогда  $AM' = DM'$ ,  $\sphericalangle AM' = \sphericalangle DM'$ , а значит, и  $\sphericalangle M'BD = \sphericalangle M'BA$ , как опирающиеся на равные дуги. Это означает, что точка  $M'$  лежит на биссектрисе угла  $ABC$  и, следовательно,  $M'$  совпадает с  $M$ . Итак, точки  $A$ ,  $M$ ,  $D$  и  $B$  лежат на одной окружности, откуда  $\angle MAI = \angle MBD = \frac{1}{2} \angle ABC$ , что и требовалось.

**Замечание.** Схема другого (вычислительного) решения состоит в проверке равенства  $KI \cdot KA = KN \cdot KM$ . Все присутствующие в равенстве отрезки выражаются

через  $KI$ :  $KN = KI \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2}$ ,  $KM = KI \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2}$ ,  $KA = \frac{p}{p-a} KI$ , где  $p$  — полупериметр треугольника  $ABC$ ,  $a = BC$  (последнее равенство легко выводится из известной формулы  $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$ ).

П.Кожевников

**M2173.** Пусть  $p > 3$  — простое число, а  $a$  и  $b$  — целые числа такие, что  $a^2 + ab + b^2$  делится на  $p$ . Докажите, что  $(a+b)^p - a^p - b^p$  делится: а) на  $p^2$ ; б\*) на  $p^3$ .

Если  $a$  кратно  $p$ , то  $b$  — тоже. В этом случае утверждение очевидно.

Далее считаем, что  $a$  и  $b$  не делятся на  $p$ . Пусть натуральное  $c$  таково, что  $bc \equiv 1 \pmod{p}$  (такое  $c$  найдется; например, в силу малой теоремы Ферма подходит  $c = b^{p-2}$ ). Положим  $ac = k$ . Тогда

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 : p &\Leftrightarrow (ac)^2 + (ac)(bc) + (bc)^2 : p \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2 + k + 1 : p. \end{aligned}$$

Это возможно только когда  $p$  дает остаток 1 при делении на 6:  $p = 6t + 1$  (см., например, задачу M1324 «Задачника «Кванта» №1 за 1992 г.).

Заметим, что

$$\begin{aligned} (a+b)^p - a^p - b^p : p^3 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (ac+bc)^p - (ac)^p - (bc)^p : p^3 \Leftrightarrow (k+1)^p - k^p - 1 : p^3. \end{aligned}$$

Теперь для решения задачи достаточно доказать следующее утверждение.

**Утверждение.** Для простого  $p = 6t + 1$  многочлен  $f(x) = (x+1)^p - x^p - 1$  делится на многочлен  $p(x^2+x+1)^2$  (т.е.  $f(x) = p(x^2+x+1)^2 g(x)$ , где  $g(x)$  — некоторый многочлен с целыми коэффициентами).

Так как  $p$  — простое, то все коэффициенты  $C_p^k$  ( $k = 1, 2, \dots, p-1$ ) многочлена  $f(x)$  делятся на  $p$ . Оставшуюся часть (делимость многочлена с целыми коэффициентами  $\frac{1}{p}f(x)$  на многочлен  $(x^2+x+1)^2$ )

можно доказать, рассматривая комплексный корень  $\epsilon$  многочлена  $x^2+x+1$  (см. ниже), или по индукции, как это сделано в «Кванте» № 3 за 2007 г. (см. леммы 1 и 2 в решении задачи M2023).

Итак, докажем, что  $\epsilon$  (как и сопряженный корень  $\bar{\epsilon}$ ) является двукратным корнем  $f(x)$ , т.е. корнем многочлена  $f(x)$  и его производной

$$f'(x) = p((x+1)^{p-1} - x^{p-1}).$$

Заметим, что  $\epsilon^3 = 1$  (так как  $\epsilon - 1 = (\epsilon - 1)(\epsilon^2 + \epsilon + 1) = 0$ ) и  $(\epsilon + 1)^3 = -1$  (так как

$$\begin{aligned} (\epsilon + 1)^3 + 1 &= (\epsilon + 2)((\epsilon + 1)^2 - (\epsilon + 1) + 1) = \\ &= (\epsilon + 2)(\epsilon^2 + \epsilon + 1) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(\varepsilon) = (\varepsilon + 1)^{6m+1} - \varepsilon^{6m+1} - 1 = (-1)^{2m} (\varepsilon + 1) - \varepsilon - 1 = 0;$$

$$\frac{1}{p} f'(\varepsilon) = (\varepsilon + 1)^{6m} - \varepsilon^{6m} = (-1)^{2m} - 1 = 0.^2$$

В. Сендеров

**M2174.** а) Существуют ли четыре равных многоугольника таких, что любые два из них не имеют общих внутренних точек, но граничат по отрезку? б) Тот же вопрос для четырех равных выпуклых многоугольников.

а) **Ответ:** существуют.

См., например, рисунок 1.

*Замечание.* Пяти многоугольников с указанным свойством не существует, иначе полный граф с 5 вершинами

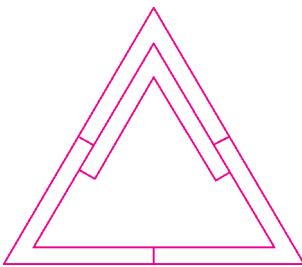


Рис. 1

был бы планарным<sup>3</sup>, что неверно.

б) **Ответ:** не существуют.

Предположим, что такие многоугольники  $P_1, P_2, P_3, P_4$  нашлись. Отметим внутри многоугольника  $P_i$  точку  $B_i$ . Кроме того, отметим внутри общего отрезка многоугольников  $P_i$  и  $P_j$  точку  $A_{ij}$  (мы будем считать, что  $A_{ij} = A_{ji}$ ); легко понять, что эта точка не может принадлежать другим многоугольникам.

Соединим теперь каждую точку  $B_i$  с точками  $A_{ij}$ . Полученные отрезки, идущие из точки  $B_i$ , лежат

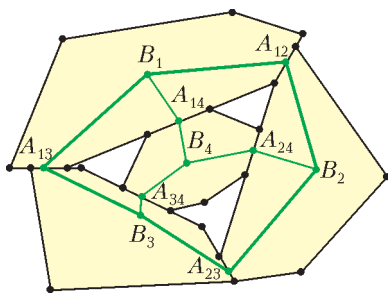


Рис. 2

внутри  $P_i$  (здесь используется выпуклость многоугольников); значит, проведенные отрезки могут пересекаться только по общему концу (рис. 2). Тогда некоторые из них образуют многоугольник  $Q$ , внутри которого лежат все остальные проведенные отрезки. Ясно, что при обходе контура  $Q$  точки  $B_i$  и  $A_{ij}$  чередуются, при этом  $A_{ij}$  лежит между точками  $B_i$  и  $B_j$ .

Покажем, что на контуре  $Q$  лежат ровно три из точек  $B_i$ . Действительно, если их там не больше двух (скажем, точки  $B_3$  и  $B_4$  лежат внутри  $Q$ ), то на  $Q$ , кроме точек  $B_1$  и  $B_2$ , может попасть только точка  $A_{12}$ , и замкнутого контура не получится. Если же на контуре  $Q$  лежат все точки  $B_i$  (скажем, в порядке  $B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_1$ ), то тогда ломаные  $B_1 A_{13} B_3$  и  $B_2 A_{24} B_4$  должны пересечься внутри  $Q$  (рис. 3),

что невозможно. Итак, пусть на контуре  $Q$  лежат точки  $B_1, B_2, B_3$ , а  $B_4$  лежит внутри; тогда контур  $Q$  есть  $B_1 A_{12} B_2 A_{23} B_3 A_{31}$ . Значит, и весь многоугольник  $P_4$  лежит внутри  $Q$ , ибо он не пересекает контур  $Q$ . Более того,  $P_4$  лежит внутри треугольника  $A_{12} A_{23} A_{31}$ , иначе какая-то внутренняя точка многоугольника  $P_4$  должна попасть в один из треугольников  $B_1 A_{12} A_{13}$ ,  $B_2 A_{12} A_{23}$ ,  $B_3 A_{23} A_{31}$ ; но эти треугольники лежат в  $P_1, P_2, P_3$  соответственно (здесь снова используется выпуклость).

<sup>2</sup> Это можно заметить и без выкладок, нарисовав на комплексной плоскости корни шестой степени из 1 – вершины правильного шестиугольника.

<sup>3</sup> Граф называется планарным, если его можно нарисовать на листе бумаги так, что ребра не пересекаются нигде, кроме вершины.

что невозможно.

Итак, пусть на контуре  $Q$  лежат точки  $B_1, B_2, B_3$ , а  $B_4$  лежит внутри; тогда контур  $Q$  есть  $B_1 A_{12} B_2 A_{23} B_3 A_{31}$ . Значит, и весь многоугольник  $P_4$  лежит внутри  $Q$ , ибо он не пересекает контур  $Q$ . Более того,  $P_4$  лежит внутри треугольника  $A_{12} A_{23} A_{31}$ , иначе какая-то внутренняя точка многоугольника  $P_4$  должна попасть в один из

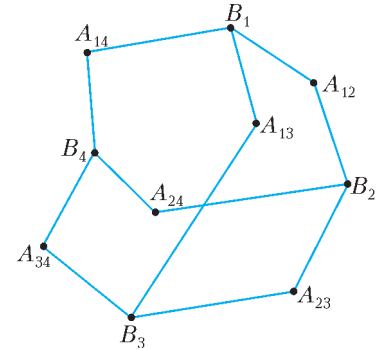


Рис. 3

треугольников  $B_1 A_{12} A_{13}$ ,  $B_2 A_{12} A_{23}$ ,  $B_3 A_{23} A_{31}$ ; но эти треугольники лежат в  $P_1, P_2, P_3$  соответственно (здесь снова используется выпуклость).

Итак,  $P_4$  лежит внутри треугольника  $A_{12} A_{23} A_{31}$ , причем вершины треугольника лежат вне многоугольника. Как известно, наибольший отрезок, лежащий внутри треугольника, – это его наибольшая сторона. Значит, все отрезки между точками  $P_4$  короче длиннейшей стороны треугольника  $A_{12} A_{13} A_{23}$  (пусть это  $A_{12} A_{13}$ ); но отрезок  $A_{12} A_{13}$  лежит в  $P_1$ . Из равенства многоугольников получаем, что и в  $P_4$  должен найтись отрезок той же длины – противоречие.

И. Богданов, С. Маркелов

**M2175.** Пусть  $S$  – множество из  $n$  действительных чисел, лежащих в отрезке  $[0; 1]$  ( $n \geq 1$ ). Для некоторого  $k$  ( $0 < k < n$ )  $k$ -элементное подмножество  $A$  множества  $S$  называется хорошим, если разность между средним арифметическим  $k$  чисел, лежащих в  $A$ , и средним арифметическим  $n - k$  чисел из  $S$ , не превосходит  $\frac{n}{2k(n-k)}$ . Докажите, что среди всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $S$  доля хороших подмножеств составляет не менее  $\frac{2}{n}$ .

Положим  $l = n - k$ ,  $\alpha = \frac{n}{2k(n-k)} = \frac{n}{2kl}$ . Через  $\bar{A}$  будем

обозначать множество всех чисел из  $S$ , не принадлежащих  $A$ . Для каждого  $k$ -элементного подмножества

$A \subset S$  положим  $r(A) = \frac{1}{k} \sum_{x_i \in A} x_i - \frac{1}{l} \sum_{x_j \in \bar{A}} x_j$ . Заметим,

что подмножество хорошее тогда и только тогда, когда  $|r(A)| \leq \alpha$ .

Каждой перестановке  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  поставим в соответствие  $n$  подмножеств  $A_i = \{y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+k-1}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (здесь и далее считаем  $y_{n+j} = y_j$  и  $A_{n+j} = A_j$ ).

**Лемма.** Среди подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , хотя бы два – хорошие подмножества.

**Доказательство леммы.** Выберем  $t$  и  $s$ , так что

$$r(A_t) = \max\{r(A_1), \dots, r(A_n)\},$$

$$r(A_s) = \min\{r(A_1), \dots, r(A_n)\};$$

без ограничения общности считаем, что  $s < t$ . Заметим, что  $\sum_{i=1}^n r(A_i) = \sum_{i=1}^n \left(k \cdot \frac{1}{k} - l\right) y_i = 0$ , в частности  $A_t \geq 0$ ,  $A_s \leq 0$ . Оценим разность между соседними  $r(A_i)$ :

$$|r(A_{i+1}) - r(A_i)| = \left| \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{l} \right) (y_{i+k} - y_i) \right| \leq \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{l} \right) = 2\alpha.$$

Рассмотрим случаи.

Если  $r(A_s) < -\alpha < \alpha < r(A_t)$ , то среди множеств  $A_s, A_{s+1}, \dots, A_{t-1}$  хотя бы одно хорошее, и среди множеств  $A_t, A_{t+1}, \dots, A_{s-1}$  хотя бы одно хорошее. Если  $-\alpha \leq r(A_s) \leq r(A_t) \leq \alpha$ , то  $A_t$  и  $A_s$  – хорошие. Если  $r(A_s) < -\alpha \leq r(A_t) \leq \alpha$ , то  $r(A_{t'})$  положительно для некоторого  $t' \neq t$  (так как  $\sum_{i=1}^n r(A_i) = 0$ ); следовательно  $A_t$  и  $A_{t'}$  – хорошие. Случай  $-\alpha \leq r(A_s) \leq \alpha < r(A_t)$  аналогичен предыдущему.

Лемма доказана.

Рассмотрим все  $n!$  перестановок  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и к каждой из них применим лемму. Фиксированное  $k$ -элементное подмножество  $A$  соответствует в точности  $nk!l!$  перестановкам  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  (так как  $y$  однозначно определяется следующими тремя параметрами: номер  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , для которого  $A = \{y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+k-1}\}$ ; перестановка чисел  $(y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+k-1})$ , принадлежащих множеству  $A$ ; перестановка чисел  $(y_{i+k}, y_{i+k+1}, \dots, y_{i-1})$ , принадлежащих множеству  $\bar{A}$ ). Следовательно, количество хороших  $k$ -элементных подмножеств не меньше чем  $2 \cdot \frac{n!}{nk!l!} = \frac{2}{n} C_n^k$ , что и требовалось установить.

А.Бадзян

**Ф2175.** Шайба скользит по горизонтальной поверхности, сила трения о которую пропорциональна квадрату скорости шайбы. Начальная скорость шайбы упала вдвое через время  $T$  после начала движения. За какое время скорость упадет еще вдвое?

Ускорение шайбы отрицательно. По условию,

$$\Delta v = -kv^2 \Delta t, \text{ или } \frac{\Delta v}{v^2} = -k \Delta t.$$

Преобразуем выражения и получим

$$\Delta \left( \frac{1}{v} \right) = \Delta(kt).$$

При такой связи между приращениями величин  $1/v$  и  $kt$  разность между ними должна все время оставаться постоянной, т.е.

$$\frac{1}{v} - kt = C.$$

Пусть при  $t = 0$  скорость составляла  $v_0$ , тогда легко найти  $C$ :

$$\frac{1}{v_0} - k \cdot 0 = C, \quad C = \frac{1}{v_0}.$$

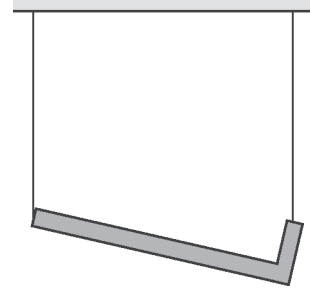
Теперь учтем, что при  $t = T$  скорость упала вдвое, а при  $T + T_1$  – еще вдвое, т.е. до  $v_0/6$ , и сразу найдем

$$T_1 = 4T.$$

Итак, нужно подождать еще  $4T$ .

А.Зильберман

**Ф2176.** Конструкция в виде буквы Г (см. рисунок) сделана из проволоки постоянного сечения, угол прямой, длина короткого куска в 4 раза меньше, чем длинного. Нити, на которых висит конструкция, вертикальны и одинаковы по длине. Найдите отношение сил натяжения этих нитей.



Из условия следует, что концы изогнутой проволоки находятся на одной высоте, тогда для угла наклона длинного отрезка проволоки к горизонту получаем  $\alpha = \arctg 0,25$ . Центр тяжести проволоки находится на отрезке, соединяющем центры тяжести отрезков проволоки – на средней линии соответствующего треугольника. Если обозначить расстояния (по горизонтали) от точек подвеса до центра тяжести  $L_1$  и  $L_2$  и найти их отношение (нам поможет геометрия), то отношение сил натяжения нитей будет равно

$$T_1 : T_2 = L_2 : L_1 \approx 0,75.$$

З.Рафаилов

**Ф2182.** К последовательно соединенным катушке индуктивностью  $1 \text{ Гн}$  и конденсатору емкостью  $1 \text{ мкФ}$  подключают источник (см. рисунок), содержащий батарейку напряжением  $1 \text{ В}$  и идеальный диод. Через секунду после этого источник отключили от контура и подключили вновь, поменяв полярность (поменяли местами выводы  $A$  и  $B$ ), еще через секунду снова поменяли полярность – и так  $100$  раз. Найдите напряжение конденсатора через секунду после последнего переключения. Элементы цепи считать идеальными.



После первого подключения источника конденсатор начнет заряжаться, вскоре его напряжение достигнет напряжения батарейки, но ток при этом не прекратится, несмотря на наличие диода, – пока катушка обладает запасом энергии, ее ЭДС индукции обеспечит протекание тока в цепи. Ток через катушку упадет до нуля через половину периода колебаний контура, т.е. намного раньше, чем кончится отведенная секунда. Далее ток в цепи отсутствует, и заряд конденсатора не изменяется до самого переключения источника. После этого диод откроется (напряжение конденсатора превышает напряжение батарейки и приложено в такой полярности, что диод открывается). Конденсатор будет заряжаться опять, пока ток через катушку не станет нулевым. Полярность конденсатора при этом изменится на противоположную.

Обозначим через  $U_N$  напряжение конденсатора в конце  $N$ -й секунды и рассмотрим процесс, происходящий в следующую секунду. Пусть  $Q$  – заряд, протекший через батарейку за эту секунду, тогда напряжение конденсатора за это время увеличится на  $Q/C$ :

$$U_{N+1} = U_N + \frac{Q}{C}.$$

Элементы цепи идеальны, поэтому энергия конденсатора за эту секунду увеличится на  $QU_0$  (батарейка совершает работу, а энергия катушки в интересующие нас моменты нулевая):

$$\frac{CU_{N+1}^2}{2} = \frac{CU_N^2}{2} + QU_0.$$

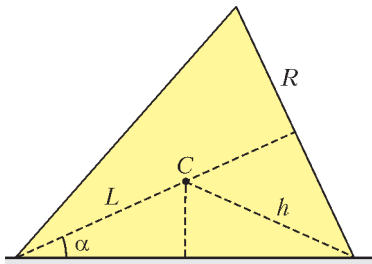
После преобразований получаем, что напряжение конденсатора каждый раз увеличивается на  $2U_0$ . После 100 переключений получится

$$U = 200U_0 = 200\text{В}.$$

Интересно, что по похожему закону будет возрастать напряжение конденсатора, если заменить батарейку с диодом источником переменного напряжения резонансной частоты. Собственно, его мы и изображали, меняя полярность батарейки в моменты нулевого тока катушки.

У.Былов

**Ф2183.** На горизонтальном столе лежит на боку однородный конус массой  $m$  с радиусом основания  $R$  и углом при вершине  $2\alpha$ . Для того чтобы медленно поставить конус на вершину в положение, при котором его ось вертикальна, нужно совершить работу  $A$ . Какую минимальную работу нужно совершить для того, чтобы из исходного положения поставить конус на основание?



Пусть расстояние от вершины конуса до его центра масс  $C$  равно  $L$  (см. рисунок). Тогда минимальная работа, которую нужно совершить для того, чтобы медленно поставить конус на вершину в

положение, при котором его ось вертикальна, равна

$$A = mg(L - L \sin \alpha).$$

Для того чтобы из исходного положения поставить конус на основание, нужно поднять центр масс конуса на высоту

$$\Delta h = h - L \sin \alpha = \sqrt{(R \operatorname{ctg} \alpha - L)^2 + R^2} - L \sin \alpha,$$

после чего он опрокинется и встанет на свое основание. Выражая из первого уравнения расстояние  $L$  и подставляя его во второе уравнение, находим искомую работу:

$$A_1 = mg\Delta h = mgR \sqrt{1 + \left( \operatorname{ctg} \alpha - \frac{A}{mgR(1 - \sin \alpha)} \right)^2} - A \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

А.Якута

**Ф2184.** Однородная цепочка закреплена одним концом на вершине гладкой сферической поверхности радиусом  $R$ , длина цепочки  $L = \pi R/3$  (рис.1). Верхний конец цепочки освобождают. С каким ускорением (по модулю) будет двигаться сразу после освобождения каждый элемент цепочки? В каком месте цепочки сила натяжения сразу после освобождения будет максимальной?

Рассмотрим малый элемент цепочки длиной  $\Delta L = R\Delta\varphi$  и массой  $\Delta m = \rho\Delta L = \rho R\Delta\varphi$  соответственно (здесь  $\rho$  – линейная плотность цепочки). На него действуют силы

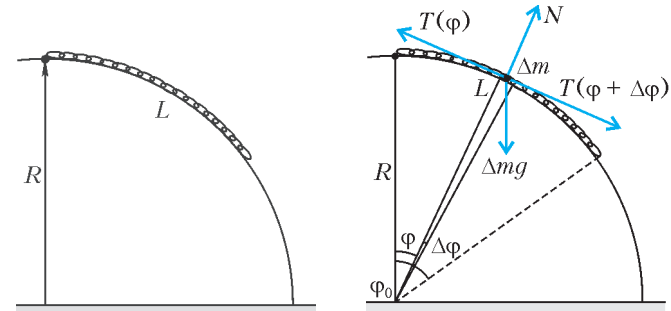


Рис. 1

Рис. 2

натяжения  $\vec{T}(\varphi + \Delta\varphi)$  и  $\vec{T}(\varphi)$ , сила реакции опоры (равная по величине силе нормального давления)  $\vec{N}$  и сила тяжести  $\vec{F}_T = \Delta m\vec{g}$  (рис.2). Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную:

$$\Delta m a_\tau = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) + \Delta mg \sin \varphi.$$

Касательное ускорение  $a_\tau$  всех элементов цепочки одинаково, а нормальное ускорение равно нулю, так как сразу после освобождения все ее элементы имеют нулевую скорость. Если просуммировать левые и правые части уравнения, выражающего второй закон Ньютона, по всей длине цепочки и принять во внимание, что на свободных концах натяжение обращается в ноль, то получим

$$\rho R a_\tau \sum \Delta\varphi = \rho R g \sum \sin \varphi \Delta\varphi.$$

Силы натяжения исключились в соответствии с третьим законом Ньютона, так как это внутренние силы системы. Переходя к пределу  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , найдем

$$a_\tau \frac{L}{R} = g \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi d\varphi = g(1 - \cos \varphi_0),$$

где  $\varphi_0 = L/R$ , или

$$a_\tau = g \frac{R}{L} (1 - \cos \varphi_0) = g \frac{R}{L} \left( 1 - \cos \frac{L}{R} \right) = \frac{3}{2\pi} g.$$

При ответе на второй вопрос следует учесть, что в том сечении, где сила натяжения  $T$  цепочки наибольшая,  $\Delta T = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) = 0$ . Обозначим положение малого элемента цепочки, находящегося в месте с наибольшим натяжением, через  $\varphi_{\max}$ . Ускорение этого элемента создается только проекцией силы тяжести на касательную:

$$a_\tau = g \sin \varphi_{\max} = g \frac{R}{L} \left( 1 - \cos \frac{L}{R} \right).$$

Отсюда находим

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{R}{L} \left( 1 - \cos \frac{L}{R} \right) = \frac{3}{2\pi} \approx 0,5, \text{ и } \varphi_{\max} \approx 30^\circ.$$

Таким образом, точка, в которой сила натяжения максимальна, находится приблизительно в середине печочки.

В.Плис

**Ф2185.** В длинном теплоизолированном цилиндрическом сосуде находится некоторое количество криптона (одноатомный газ, его молярная масса  $M = 84$  г/моль) при температуре  $T = 200$  К и давлении  $p = 0,1$  Па. Объем сосуда уменьшают на 1%, быстро сдвигая поршень. Скорость движения поршня  $v = 1000$  м/с. Оцените температуру газа после остановки поршня и установления давления в сосуде.

При заданной температуре газа скорости атомов невелики:

$$\sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,3 \cdot 200}{0,084}} \text{ м/с} \approx 240 \text{ м/с}.$$

При большой скорости поршня можно считать, что он налетает на покоящиеся частицы, и они отскакивают при абсолютно упругом ударе с удвоенной скоростью поршня. Длина свободного пробега при таком низком давлении большая, поэтому удары поршня и частиц можно считать однократными. В результате 1% атомов криптона после остановки поршня имеет скорости 2000 м/с, а энергии остальных атомов соответствуют начальной температуре. Энергия быстрого атома в  $(2000/240)^2 \approx 69$  раз больше, суммарная же энергия больше в  $(0,99 + 0,01 \cdot 69) \approx 1,68$  раз. После выравнивания средних энергий частиц можно говорить об установившейся температуре газа:

$$T_{\text{уст}} \approx 200 \text{ К} \cdot 1,68 \approx 340 \text{ К}.$$

А.Повторов

**Ф2186.** Электрическая цепь состоит из пяти резисторов и двух идеальных амперметров (рис.1). Сопротивления резисторов  $R_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$  заданы, а сопротивление  $R_3$  неизвестно. Найдите показание амперметра  $A_2$ , если известна сила тока  $I_1$ , протекающего через амперметр  $A_1$ .

Запишем закон Ома для участка цепи BC (рис.2):

$$I_0 R_0 + I_1 R_1 = U = I_2 R_2 + I_3 R_0.$$

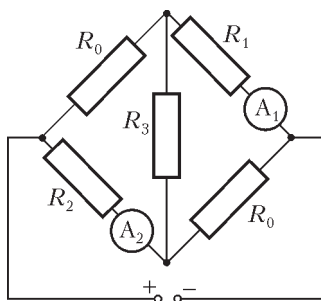


Рис. 1

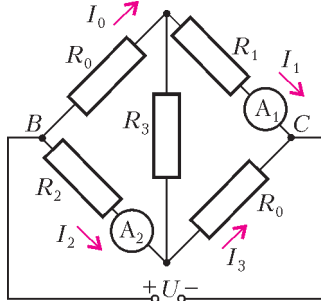


Рис. 2

Сила тока, протекающего через источник, равна

$$I = I_0 + I_2 = I_1 + I_3.$$

Преобразуем полученные уравнения к виду

$$(I_0 - I_3) R_0 = I_2 R_2 - I_1 R_1,$$

$$I_0 - I_3 = I_1 - I_2.$$

Отсюда найдем

$$I_2 = I_1 \frac{R_0 + R_1}{R_0 + R_2}.$$

В.Слободянин

**Ф2187.** Тонкое кольцо радиусом  $R$  заряжено зарядом  $Q$ , равномерно распределенным по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная непроводящая нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда  $\gamma$ . Найдите модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.

Для определенности будем считать, что кольцо и нить заряжены положительно (это не нарушит общности рассуждений, так как нас интересует модуль силы, а в случае если заряды будут разноименными, изменится только направление этой силы). При таком выборе знаков зарядов нить будет отталкиваться от кольца.

Для решения задачи применим следующий прием. Мысленно отрезем от дальнего конца нити (который находится бесконечно далеко от кольца) маленький элемент длиной  $\Delta x$  с зарядом  $\Delta q = \gamma \Delta x$  и приклеим ко второму концу нити, который находится в центре кольца. Данная процедура эквивалентна тому, что нить переместилась в сторону кольца на малое расстояние  $\Delta x$  (естественно, оставшись при этом полубесконечной). При таком перемещении нити электростатическое поле, создаваемое кольцом, совершило работу

$$\Delta A = -F \Delta x,$$

где  $F$  – искомая сила отталкивания кольца и нити (знак «минус» появился потому, что направление «смещения» нити противоположно направлению этой силы). С другой стороны, эта же работа сил электростатического поля кольца равна

$$\Delta A = \Delta q (\varphi_\infty - \varphi_0),$$

где  $\varphi_\infty = 0$  и  $\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$  – потенциалы поля кольца в бесконечно удаленной от него точке (откуда переносился заряд) и в центре кольца (куда переносился заряд). С учетом всех записанных формул получаем

$$\Delta A = -F \Delta x = -\frac{Q \Delta q}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Q \gamma \Delta x}{4\pi\epsilon_0 R},$$

откуда находим

$$F = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Заметим, что задачу можно решить и «в лоб» – с помощью простого интегрирования.

П.Поляков

**Ф2188.** В свободном пространстве на окружности радиусом  $R_0$  в вершинах вписанного квадрата рас-



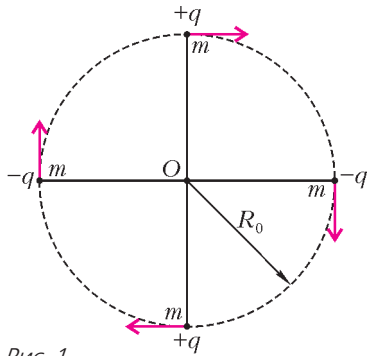


Рис. 1

положены четыре точечные массы  $m$ , две из них несут заряд  $+q$ , а две другие – заряд  $-q$  (рис.1). В начальный момент этим материальным точкам сообщают одинаковые по модулю скорости, направленные по касательным к окружности по часовой стрелке.

Известно, что достигаемое в процессе движения минимальное расстояние от любой из точечных масс до центра  $O$  начальной окружности равно  $R_1$  ( $R_1 < R_0$ ). Считайте, что в любой момент времени заряды находятся в вершинах квадрата с центром в точке  $O$ . Действием гравитационных сил можно пренебречь. По какой траектории движется каждая из частиц? Определите время движения частицы из начального положения до положения с расстоянием  $R_1$  до центра окружности.

В силу симметрии, все материальные точки будут двигаться по одинаковым траекториям, оставаясь в

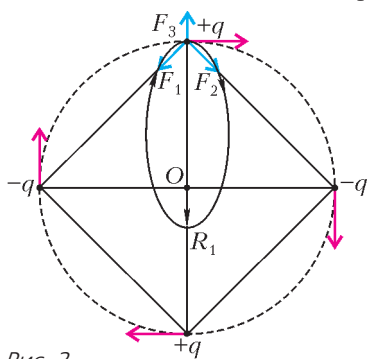


Рис. 2

каждый момент времени на окружности некоторого переменного радиуса  $r$  в вершинах квадрата со стороной  $a = \sqrt{2}r$ .

Рассмотрим одну из материальных точек (рис.2). На нее со стороны остальных частиц действуют силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ . По закону

Кулона модули этих сил равны

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2r^2} \text{ и } F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4r^2}.$$

Результирующая сила всегда направлена к центру (точка  $O$ ), а ее модуль равен

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q^2}{2r^2} \sqrt{2} - \frac{q^2}{4r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \left( \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \right).$$

Отсюда следует, что каждая из материальных точек движется так, как если бы из центра ее притягивал заряд, противоположный по знаку и по абсолютной величине равный

$$Q = q \left( \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \right).$$

Формула для  $F(r)$  аналогична закону Кулона (или закону всемирного тяготения), так как  $F(r) \sim 1/r^2$ . Поэтому траектории точек – эллипсы с большой осью  $R_0 + R_1$ . Точка  $O$  находится в одном из фокусов этих эллипсов.

Теперь перейдем ко второму вопросу. Характерное время – это период  $T$  обращения по эллиптической орбите. Его можно найти из третьего закона Кеплера. Найдем сначала период  $T_0$  обращения точечной массы  $m$ , движущейся под действием силы  $F(r)$  по круговой орбите радиусом  $R_0$ :

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0}, \quad \frac{mv_0^2}{R_0} = F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \left( \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \right),$$

откуда

$$T_0 = \frac{2\pi}{q} \sqrt{4\pi\epsilon_0 \frac{4mR_0^3}{2\sqrt{2}-1}}.$$

По третьему закону Кеплера,

$$\left( \frac{T}{T_0} \right)^2 = \left( \frac{R_0 + R_1}{2R_0} \right)^3, \text{ и } T = T_0 \left( \frac{R_0 + R_1}{2R_0} \right)^{3/2}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для  $T_0$  и учитывая, что из начального положения до положения с расстоянием  $R_1$  до центра окружности частица движется время  $\tau = T/2$ , находим

$$\tau = \frac{\pi}{q} \sqrt{2\pi\epsilon_0 \frac{m(R_0 + R_1)^3}{2\sqrt{2}-1}}.$$

Х.Матвеев, М.Проскурин

ИНФОРМАЦИЯ

**«Свободный полет»  
продолжается!**

Благотворительный фонд «Новая мысль» объявляет конкурс «Свободный полет» на 2011 год.

Учитывая результаты и опыт проведения этого конкурса в 2010 году, решением Оргкомитета в Положение о проведении конкурса внесены некоторые изменения и уточнения. Они касаются структуры и общего объема наградного фонда, а также требований к представляемым на конкурс работам.

Призовые фонды в 2011 году составят:

для участников до 18 лет – 300000 руб.,

для возрастной группы до 35 лет – 600000 руб.

Объем работы (без титульного листа): не более 10 машинописных страниц, включая все необходимые приложения.

Срок приема работ: с 1 февраля до 15 апреля 2011года.

Более подробная информация и необходимые формальные дополнения к условиям проведения конкурса «Свободный полет» в 2011 году размещены на сайте Фонда «Новая мысль» [novmysl.finam.ru](http://novmysl.finam.ru) и будут опубликованы в шестом номере журнала «Квант» за 2010 год.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

*...зеленый и голубой усиливают свой цвет в полутени, а красный и желтый выигрывают в цвете в своих освещенных частях, и то же самое делает белый.*

Леонардо да Винчи

*Свет состоит из лучей всех цветов не только по выходе из призмы, но даже тогда, когда он еще не дошел до призмы, до всякого преломления.*

Исаак Ньютон

*Сам факт зависимости показателя преломления от частоты называется дисперсией <от лат. dispersion – рассеяние>, так как именно из-за нее свет раскладывается призмой в спектр.*

Ричард Фейнман

*Утверждения Ньютона – чудовищное предположение. Да и как то может быть, чтобы самый прозрачный, самый чистый цвет – белый – оказался смесью цветных лучей?*

Иоганн Вольфганг Гёте

*Любой цвет от смачивания водой делается гуще. Почему? Надо подумать.*

Михаил Ломоносов

# А так ли хорошо знаком вам цвет?

Повседневно мы используем понятие цвета, не особенно задумываясь над его точным определением. Но стоит лишь попытаться установить его меру, как мы столкнемся, скорее всего, с теми же трудностями, что испытывали наши предшественники. Долгое время ученые обходили эту проблему, а как только они за нее брались, так на них обрушивался град критики.

Порывшись в справочниках, мы найдем, например, такие высказывания: «цвет – свойство тел вызывать определенное зрительное ощущение в соответствии со спектральным составом и интенсивностью отражаемого или испускаемого ими видимого излучения»; «длина волны света в вакууме... задает количественную меру того, что субъективно воспринимается как цвет монохроматического луча». Стало легче?

Тем не менее, несмотря на впечатление неконкретности и даже некоего произвола, можно утверждать, что категория цвета прочно вошла и в науку, и в практику. Многоцветье спектров – мощный инструмент анализа при контроле за плавкой металлов и в изучении структуры и состава звезд, незаменимый помощник инженеров-строителей, дизайнеров и колористов. А оптическая аналогия послужила основанием для выбора названия одной из характеристик мельчайших частиц материи – кварков и глюонов, также снабдив их «цветом».

Таким образом, наблюдая за радугой или зарей, полярными сияниями или мыльными пузырями, вспоминайте не только о поэтических образах, но и о существовании «разноцветной» физики.

### Вопросы и задачи

1. Как ответить на вопрос М.В.Ломоносова, поставленный в эпиграф?
2. Почему цвета некоторых материалов при дневном и электрическом освещении различны?
3. Если луч белого света направить на треугольную призму, стоящую на столе, не под углом к горизонту, а горизонтально, то часть цветных полосок, наблюдаемых на экране за призмой в первом случае, может исчезнуть. Каких и по какой причине?

4. При повышении температуры вещества происходит как расширение диапазона непрерывного спектра, так и смещение его максимума. В какую именно сторону: красного или фиолетового цвета?

5. Линза дает изображение прямоугольника, верхняя половина которого выкрашена в красный цвет, а нижняя – в синий. Прямоугольник расположен перпендикулярно главной оптической оси линзы. Почему не удастся найти такое положение экрана, чтобы на нем одновременно было резкое изображение обеих половин прямоугольника?

6. Если смотреть на разноцветную светящуюся рекламу, например из газоразрядных трубок, то красные буквы всегда кажутся выступающими вперед по отношению к синим или зеленым. Чем это можно объяснить?

7. Почему призматический спектр чаще применяют для изучения состава коротковолнового излучения, а в случае длинноволнового излучения целесообразнее пользоваться дифракционным спектром?

8. Цветное стекло растерто в порошок, который кажется совершенно белым. Как узнать, каков истинный цвет стекла?

9. Получаемый на земле непрерывный спектр излучения Солнца содержит более двух десятков темных линий, т.е. фактически представляет собой спектр поглощения. Чем это объяснить?

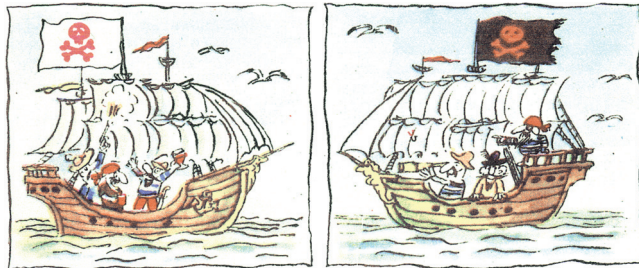
10. Что происходит с солнечным спектром во время наблюдения полного солнечного затмения?

11. Какая бумага – синяя, красная, черная – скорее зажигается солнечными лучами, собранными при помощи вогнутого зеркала или линзы?

12. Если смешать синюю и желтую краски, то получится зеленая краска. Но если светом синей и желтой ламп осветить лист чертежной бумаги, то она будет иметь белый цвет (синий и желтый цвета являются дополнительными). Нет ли здесь противоречия?

13. При наблюдении растений в свете синей лампы (вариант: через синие очки) зеленые листья кажутся малиново-красными. Как это объяснить?

14. На пакете с фотопленкой написано: «Обрабатывать при красном свете». Получится ли на этой пленке пиратс-



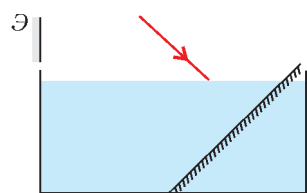
кий флаг, изображенный на рисунке слева? А справа?

**15.** При слабом освещении синий цвет иногда может казаться ярче красного, однако при хорошем освещении различие в их яркости часто бывает обратным. Почему относительная яркость красного и синего цветов зависит от уровня освещенности?

**16.** Отчего сигналы опасности подаются красным светом, хотя глаз наиболее чувствителен к желто-зеленому свету?

**17.** Почему виднеющийся на горизонте лес или дальние горы кажутся подернутыми голубоватой дымкой?

### Микроопыт



Наполните неглубокий сосуд водой, вставьте в него плоское зеркало, как показано на рисунке, и пустите на поверхность воды луч солнечного света. На экране Э (стене или потолке) возникнет яркая картинка. Что она собой представляет и как она образовалась?

лась?

### Любопытно, что...

...кусочек красного стекла кажется красным и в отраженном и в проходящем свете. А вот у цветных металлов эти цвета различаются — так, золото отражает преимущественно красные и желтые лучи, но тонкая просвечивающая золотая пластинка пропускает зеленый свет.

...ученые XVII века не считали цвет объективным свойством света. Например, Кеплер полагал, что цвет — это качество, которое должны изучать философы, а не физики. И лишь Декарт, хотя и не мог объяснить происхождение цветов, был убежден в существовании связи между ними и объективными характеристиками света.

...созданная Гюйгенсом волновая теория света была большим шагом вперед — так, она дала используемые до сих пор объяснения законов геометрической оптики. Однако главная ее неудача заключалась в отсутствии категории цвета, т.е. она была теорией бесцветного света, несмотря на уже сделанное к тому времени Ньютоном открытие — обнаружение дисперсии света.

...призма — главный инструмент в ньютоновских опытах — была им куплена в аптеке: в те времена наблюдение призматических спектров было распространенным развлечением.

...многие предшественники Ньютона считали, что цвета зарождаются в самих призмах. Так, постоянный оппонент Ньютона Роберт Гук думал, что в солнечном луче не могут содержаться все цвета; это так же странно, считал он, как утверждать, что «в воздухе органических мехов содержатся все тона».

...опыты Ньютона привели его и к печальному выводу: в сложных приборах с большим количеством линз и призм разложение белого света сопровождается появлением у

изображения пестрой цветной каймы. Явление, названное «хроматической аберрацией», удалось впоследствии преодолеть, соединяя несколько слоев стекла с «уравновешивающими» друг друга показателями преломления, что привело к созданию ахроматических линз и подзорных труб с четкими изображениями без цветных бликов и полос.

...идея о том, что цвет определяется частотой колебаний в световой волне, впервые была высказана знаменитым математиком, механиком и физиком Леонардом Эйлером в 1752 году, при этом максимальная длина волны соответствует красным лучам, а минимальная — фиолетовым.

...первоначально Ньютон различал в солнечном спектре только пять цветов, но позже, стремясь к соответствию между числом цветов и числом основных тонов музыкальной гаммы, добавил еще два. Возможно, здесь сказались пристрастие к древней магии числа «семь», согласно которой на небе было семь планет, а потому в неделе — семь дней, в алхимии — семь основных металлов и так далее...

...Гёте, считавший себя выдающимся естествоиспытателем и посредственным поэтом, горячо критикуя Ньютона, замечал, что выявленные в его опытах свойства света не истинны, поскольку свет в них «замучен разного рода орудиями пыток — щелями, призмами, линзами». Правда, в этой критике вполне серьезные физики позже узрели наивное предвосхищение современной точки зрения на роль измерительной аппаратуры.

...теория цветового зрения — о получении всех цветов при помощи смешения трех основных — ведет начало от речи Ломоносова 1756 года «Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее...», не замеченной, однако, научным миром. Полвека спустя эту теорию поддержал Юнг, а уж его предположения в 1860-х годах детально развил в трехкомпонентную теорию цвета Гельмгольц.

...если какие-либо пигменты отсутствуют в фоторецепторах сетчатки, то человек не ощущает соответствующих тонов, т.е. становится частично цветослепым. Таким был английский физик Дальтон, по имени которого и назван этот недостаток зрения. А обнаружил его у Дальтона не кто иной, как Юнг.

...явление, упомянутое в первом эпиграфе и в условии задачи 15, носит название эффекта Пуркине — в честь исследовавшего его знаменитого чешского биолога, также показавшего, что различные среды глаза обладают неодинаковым преломлением, и объяснившего возникновение некоторых зрительных иллюзий.

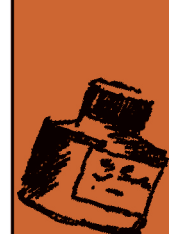
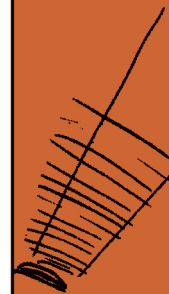
...оптические спектры атомов или ионов — не только богатый источник информации о строении атома, в них заключены сведения и о характеристиках атомного ядра, прежде всего связанных с его электрическим зарядом.

### Что читать в «Кванте» о цвете

(публикации последних лет)

1. «Калейдоскоп «Кванта» — 2005, №5, с.32; 2008, №5, с.32;
2. «Загадка «тени от прозрачной пластинки» — 2006, №1, с.30;
3. «Как увидеть невидимку» — 2006, №4, с.9;
4. «Сюрпризы зеленого стекла» — 2007, №5, с.10;
5. «Самая светлая революция и ее творцы» — 2008, №6, с.2;
6. «Опыты с компакт-диск» — 2009, №4, с.44;
7. «Красное небо, синяя луна» — 2010, №1, с.39.

Материал подготовил А.Леоневич



# Задачи

1.  $КОЕ - ЧТО = 857$ . На сколько  $КТО - ТО$  больше, чем  $КОЕ - КТО$ ? (Как обычно, одинаковыми буквами обозначаются одинаковые цифры, а разными – разные.)

*А.Хачатурян*



2. В некотором году количество четвергов равно количеству суббот. Обязательно ли и количество пятниц в этом году такое же? А если год високосный?

*А.Канель-Белов*

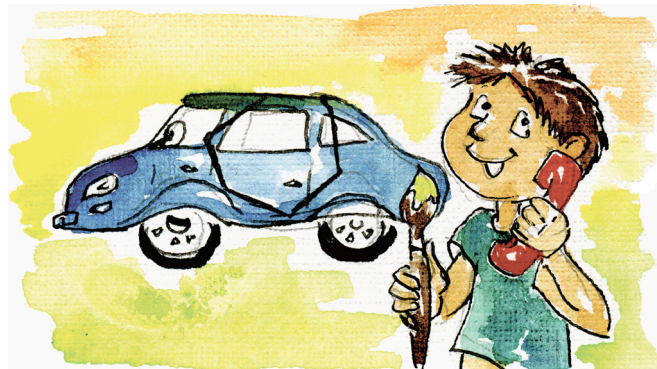


3. – Я нарисовал многоугольник и провел в нем все диагонали. Оказалось, что через середину каждой диагонали проходит какая-нибудь другая диагональ, – сказал Петя.  
– Это параллелограмм, – сказал Вася.  
– Нет.  
– Тогда правильный многоугольник.  
– Тоже нет.

А вы можете нарисовать такой многоугольник?

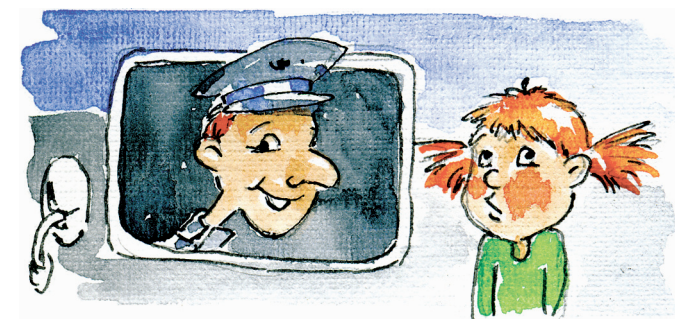
*А.Шаповалов*

*Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.*



4. Зачем машинист длинного товарного поезда, прежде чем тронуться, сдает немного назад?

*Фольклор*



5. На острове живут лжецы (всегда лгут), правдцы (всегда говорят правду) и хитрецы (врут через раз). Однажды встретились три незнакомых друг с другом мудрых островитянина и между ними произошел такой разговор.

*А:* Я не знаю, есть ли среди нас лжецы.

*Б:* Я не знаю, есть ли среди нас правдцы.

*В:* Я не знаю, есть ли среди нас хитрецы.

*А:* Я даже не знаю, есть ли среди вас лжецы.

*Б:* Я даже не знаю, есть ли среди вас правдцы.

*В:* Я даже не знаю, есть ли среди вас хитрецы.

Кто из них кто?

*А.Хачатурян*

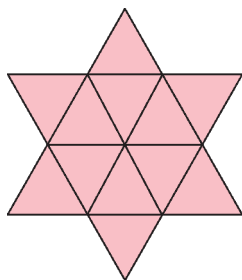


*Иллюстрации Д.Гришуковой*

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.



6. В единичные треугольники фигуры впишите числа от 1 до 12 так, чтобы сумма четырех чисел в каждом треугольнике со стороной 2 была равна 20.

*Н.Авилов*

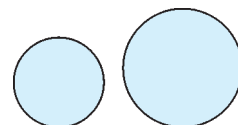
7. Квартира представляет собой квадрат  $3 \times 3$ , разделенный стенами на квадратики  $1 \times 1$  — комнаты. Между каждыми двумя соседними по стене комнатами есть дверь, но сейчас все двери закрыты. Какое наименьшее число дверей нужно открыть, чтобы кот, сидевший в одной из комнат, мог гулять по всей квартире?

8. Два одинаковых точечных шара движутся с разными скоростями по одной окружности в одну сторону. Запущенные с этими скоростями каждый в отдельности, они делали бы в минуту 7 и 12 оборотов соответственно. При совместном движении они сталкиваются, обмениваясь после удара своими скоростями. Докажите, что шары будут встречаться в конечном числе точек, расположенных в вершинах некоторого правильного многоугольника, и найдите число этих точек.

*Н.Стрелкова*

*Г.Гальперин*

9. На плоскости даны два непесекающихся круга. Найдется ли вне этих кругов такая точка  $A$ , что любая прямая, проходящая через  $A$ , обязательно «заденет» хотя бы один из них (т.е. пересечет или коснется)?



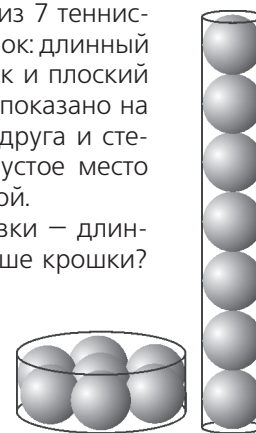
*Фольклор*

10. Фирма выпускает наборы из 7 теннисных мячиков в двух видах упаковок: длинный цилиндр толщиной в один мячик и плоский цилиндр высотой в 1 мячик, как показано на рисунке. Мячики касаются друг друга и стенок так, чтобы не болтались. Пустое место заполняется пластиковой крошкой.

а) На заполнение какой упаковки — длинной или плоской — уходит больше крошки?

б\*) Сколько граммов крошки уходит на заполнение плоской упаковки, если на заполнение длинной требуется 90 граммов?

Указание. Для решения пункта б) вам понадобится интересный факт, который знал еще Архимед: шар занимает ровно  $2/3$  объема цилиндра, в который он вписан (шар касается стенок, дна и крышки цилиндра).



*Г.Гальперин, А.Шаповалов*

## «КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

1. На табло горит верное равенство, только один пиксель сломан (либо горит, а должен быть погашен, либо погашен, а должен гореть):



Какой пиксель сломан?

*Участники сообщества www.braingames.ru*

2. Разгадайте шуточную загадку:

1 см бумаги — 9 метров,  
2 см бумаги — 27 метров,  
а 3 см бумаги — сколько метров?

*А.Тарасов*

3. Вы находитесь на поляне, окруженной рвом шириной 10 м и глубиной 5 м. В вашем распоряжении только лестница длиной 2 м и неограниченный запас веревки толщиной 3 мм. Как выбраться?

*Фольклор*

4. Зачем ведра делают «скошенными» (нижний диаметр немного меньше верхнего), а не цилиндрическими?

*Фольклор*

# Как всегда, на высоте!

(ИЗ МЕМУАРОВ БАРОНА МЮНХГАУЗЕНА)

Хорошо известно, что барон Мюнхгаузен дружен с геометрией. Иначе зачем бы он носил на такой умной голове такую знаменитую «треуголку»? В геометрии Мюнхгаузен старается (впрочем, как и во всем остальном) *всегда находится на высоте*. Надо сказать, у барона это здорово получается! Поскольку в последнее время некоторые из его мемуаров стали доступны, мы с удовольствием публикуем их с небольшими сокращениями, обозначенными многоточием...

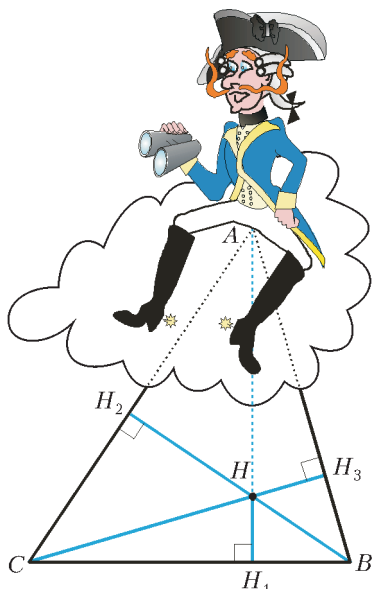


Рис. 1

«Вершина  $A$  совершенно скрылась в облаках. Видимость – даже не нулевая, а со знаком «минус». Тем не менее, взбираясь на вершину, я просто обязан был находиться на высоте...»

**Задача 1.** Вершина  $A$  в треугольнике  $ABC$  недоступна. Пользуясь циркулем и линейкой, постройте высоту  $AH_1$  этого треугольника.

**Решение.** Проводим высоты  $BH_2$  и  $CH_3$ , которые пересекаются в точке  $H$  (рис.1). Через эту точку проходит и третья высота

(так как высоты треугольника пересекаются в одной точке). Из  $H$  проводим перпендикуляр  $HH_1$  к стороне  $BC$ . Прямая  $HH_1$  совпадает с искомой.

«После того, как я совершил полукругосветное путешествие, мне вновь очень важно было оказаться на высоте. Однако возможности мои были сильно ограничены. Дело было так...»

**Задача 2.** Дана полуокружность с диаметром  $BC$  и точка  $A$  вне полуокружности. При помощи только линейки проведите высоту  $AH_1$  в треугольнике  $ABC$ .

**Решение.** Проводим  $AB$  и  $AC$ , которые пересекают полуокружность в точках  $K$  и  $N$  соответственно (рис.2). Соединив  $B$  и  $N$ ,  $C$  и  $K$ , заметим:  $BN$  и  $CK$  – высоты в треугольнике  $ABC$  ( $\angle BKC = \angle BNC = 90^\circ$  – вписанные, опираются на диаметр). Тогда прямая, проведенная через вершину  $A$  и точку  $N$  пересечения  $BN$  и  $CK$ , совпадает с высотой  $AH_1$ .

«Однажды я во весь опор скакал на коне, чтобы сообщить важную новость друзьям. Вдруг на моем

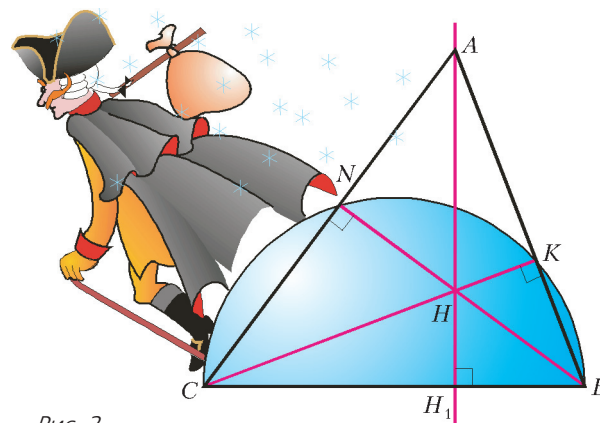


Рис. 2

пути – непроходимое болото треугольной формы. Всем известно, что я могу вытаскивать себя за волосы из болота вместе с конем. Но каждая секунда дорога. Единственная тропинка проходит по высоте. И конечно я, как всегда, должен быть на ней. И побыстрее! А пока что мы с конем – в самом начале тропинки. Как быть?..»

**Задача 3.** Дана прямая  $l$ , содержащая сторону  $BC$  треугольника  $ABC$ , и точка  $H_1$  – основание высоты  $AH_1$ . Проведя не более трех линий циркулем и линейкой, постройте прямую  $AH_1$ .

**Решение.** Берем произвольную точку  $O$  вне прямой  $l$  и строим окружность  $\omega$  с центром в  $O$  радиуса  $OH_1$  (рис.3). Пусть  $\omega$  пересекает  $l$  в точке  $T$  (кроме  $H_1$ ).

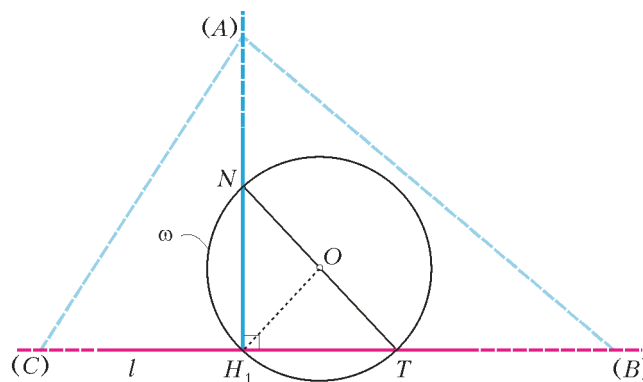


Рис. 3

Вторая линия – прямая  $TO$ , которая пересекает  $\omega$  в точке  $N$ . Очевидно, третья линия – прямая  $NH_1$  – совпадает с искомой, так как  $\angle NH_1T = 90^\circ$  (вписанный, опирается на диаметр).

«Прогуливаясь со своей собакой Матильдой по высоте  $AH_1$ , я заметил, что в какой бы точке высоты мы с ней ни оказались...»

**Задача 4.** Докажите, что для любой точки  $X$  высоты  $AH_1$  треугольника  $ABC$  выполняется равенство:  $b^2 - c^2 = CX^2 - BX^2$ , где  $AC = b$ ,  $AB = c$ .

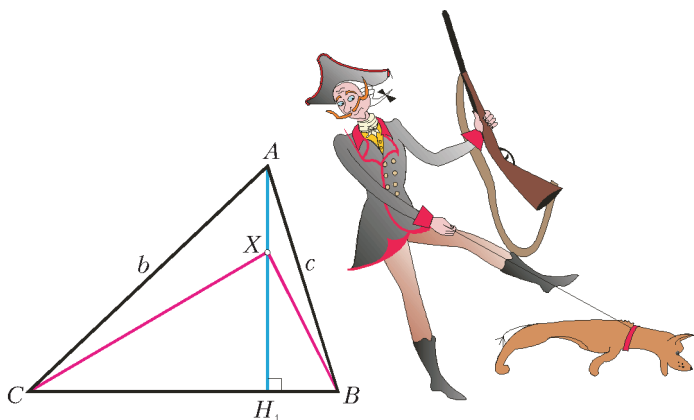


Рис. 4

**Решение.** По теореме Пифагора для треугольников  $AH_1C$  и  $AH_1B$  (рис.4) имеем:  $b^2 - CH_1^2 = AH_1^2$  и  $c^2 - BH_1^2 = AH_1^2$ , откуда

$$b^2 - c^2 = CH_1^2 - BH_1^2. \quad (1)$$

По той же теореме для треугольников  $CXH_1$  и  $BXH_1$ :  $CX^2 - CH_1^2 = XH_1^2$  и  $BX^2 - BH_1^2 = XH_1^2$ , откуда

$$CX^2 - BX^2 = CH_1^2 - BH_1^2. \quad (2)$$

Сравнив (1) и (2), получим требуемое:

$$b^2 - c^2 = CX^2 - BX^2.$$

«Однажды, находясь, как всегда, на высоте, я почувствовал, что одновременно нахожусь и на биссектрисе, но совсем другого треугольника. Удивительное дело! – подумал я...»

**Задача 5.** Высоты  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  остроугольного треугольника  $ABC$  являются биссектрисами треугольника  $H_1H_2H_3$ . Докажите!

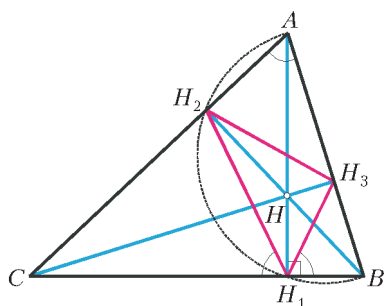


Рис. 5

**Решение.** Около четырехугольника  $AH_2H_1B$  можно описать окружность с диаметром  $AB$ , так как  $\angle AH_2B = \angle AH_1B = 90^\circ$  (рис. 5). Тогда  $\angle H_2H_1B = 180^\circ - \angle A$  и смежный с ним  $\angle H_2H_1C = \angle A$ . Аналогично показывается, что и  $\angle H_3H_1B = \angle A$ . Поскольку  $AH_1 \perp BC$ , то высота  $AH_1$  является биссектрисой угла  $H_2H_1H_3$ . Точно так же  $BH_2$  и  $CH_3$  являются биссектрисами соответствующих углов треугольника  $H_1H_2H_3$ .

«Быть может, вам покажется странным, но как-то раз, будучи на высоте и находясь под градусом неприятельских ядер, я снова не мог отделаться от мысли, что нахожусь на биссектрисе. Вот как это было...»

**Задача 6.** На высоте  $AH_1$  треугольника  $ABC$  взята

произвольная точка  $X$ . Лучи  $BX$  и  $CX$  пересекают  $AC$  и  $AB$  в точках  $N$  и  $T$  соответственно (рис.6). Докажите, что  $AH_1$  – биссектриса угла  $NH_1T$ .

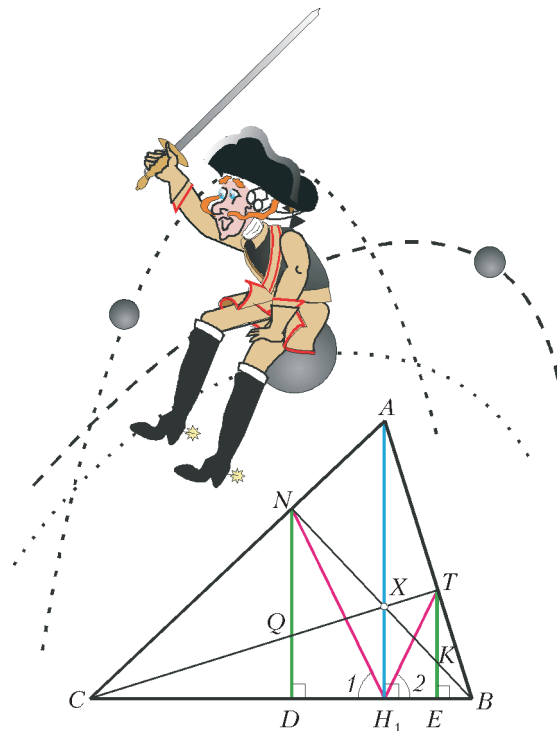


Рис. 6

**Решение.** Проведем  $ND \perp BC$  и  $TE \perp BC$ . Пусть также  $Q = ND \cap CT$  и  $K = TE \cap BN$ . Из подобия треугольников  $NXQ$  и  $KXT$  следует:  $\frac{NQ}{TK} = \frac{NX}{XK}$ . Поскольку  $\frac{NX}{XK} = \frac{DH_1}{H_1E}$  (теорема Фалеса), то

$$\frac{NQ}{TK} = \frac{DH_1}{H_1E}. \quad (1)$$

Согласно теореме Фалеса,  $\frac{TK}{TE} = \frac{AX}{AH_1}$  и  $\frac{AX}{AH_1} = \frac{NQ}{ND}$ .  
Значит,  $\frac{NQ}{ND} = \frac{TK}{TE}$ , или

$$\frac{NQ}{TK} = \frac{ND}{TE}. \quad (2)$$

Сравнив (1) и (2), получаем:  $\frac{ND}{TE} = \frac{DH_1}{H_1E}$ , т.е. прямоугольные треугольники  $NDH_1$  и  $TEH_1$  подобны, или  $\angle 1 = \angle 2$ . А это и означает, что высота  $AH_1$  является биссектрисой угла  $NH_1T$ .

«Замечу вам, друзья мои, что несколько раз мне приходилось находить длину высоты, на которой я, как всегда, находился. Поведаю вам о двух таких случаях.

Случай I...»

**Задача 7.** Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$  равны  $R$  и  $r$  соответственно. Найдите длину высоты  $AH_1$ , если известно, что радиус  $AO$  описанной окружности перпендикулярен отрезку  $OI$  (где  $I$  – центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности).

**Решение.** Сначала докажем важную лемму.

**Лемма.** Биссектриса треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из той же вершины.

Пусть прямая  $AH_1$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $K$  (рис.7).

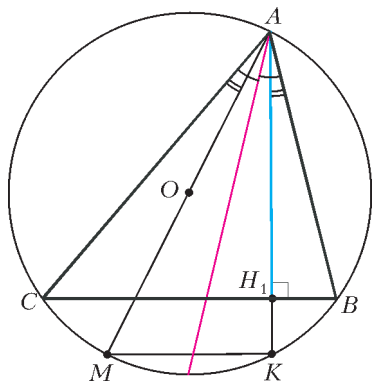


Рис. 7

Проведем диаметр  $AM$  этой окружности. Тогда  $\angle AKM = 90^\circ$ , как опирающийся на диаметр, откуда прямые  $KM$  и  $BC$  параллельны, поскольку обе они образуют угол  $90^\circ$  с прямой  $AH_1$ . Значит, равны дуги  $BK$  и  $CM$ , ведь они высекаются параллельными прямыми. Поэтому равны опирающиеся на эти дуги вписанные углы  $BAK$  и  $SAM$ . Тогда, поскольку биссектриса угла  $BAC$  делит этот угол пополам, она и угол  $KAM$  делит пополам. Лемма доказана.

Вернемся к решению задачи. Из точки  $I$  опустим перпендикуляр  $IT$  на высоту  $AH_1$  (рис.8). Очевидно,  $TH_1 = r$ . Заметим, что  $AI$  – биссектриса угла  $A$ , и по лемме она делит пополам угол  $OAH_1$ , т.е.  $\angle 1 = \angle 2$  и треугольники  $AIO$  и  $AIT$  равны по гипотенузе и острому углу. Тогда  $AT = AO = R$  и  $AH_1 = R + r$ .

«Случай II...»  
**Задача 8.**  $AH_1$  – высота в прямоугольном треугольнике  $ABC$ , проведенная из вершины прямого угла. Площади треугольников  $ACH_1$  и  $ABH_1$  равны  $S_1$  и  $S_2$  соответственно (рис.9). Найдите длину высоты  $AH_1$ .

**Решение.** Так как  $2S_1 = AH_1 \cdot CH_1$  и  $2S_2 = AH_1 \cdot BH_1$ , то, перемножив левые и правые части этих двух равенств, получим:  $AH_1^2 \cdot BH_1 \cdot CH_1 = 4S_1S_2$ . Но  $BH_1 \cdot CH_1 = AH_1^2$  (известная формула для прямоугольного треугольника, попробуйте доказать ее сами). Тогда  $AH_1^4 = 4S_1S_2$ , откуда  $AH_1 = \sqrt[4]{4S_1S_2}$ .

«Помнится, пришлось мне выдержать трудный бой с пиратским кораблем в точке  $N$  внутри Бермудского треугольника  $ABC$ . Как вы думаете, находился ли я во время боя на высоте?..»

**Задача 9.** На стороне  $BC$  остроугольного треуголь-

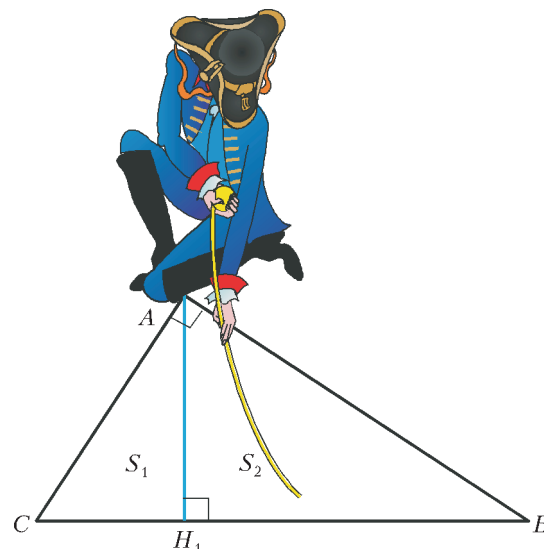


Рис. 9

ника  $ABC$  как на диаметре построен круг. Он пересекает  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно. Касательные к нему в этих точках пересекаются в точке  $N$ . Докажите, что  $N$  принадлежит высоте  $AH_1$ .

**Решение.** Проведем  $BT$  и  $CK$  (рис.10), заметим, что они являются высотами в треугольнике  $ABC$ , поскольку

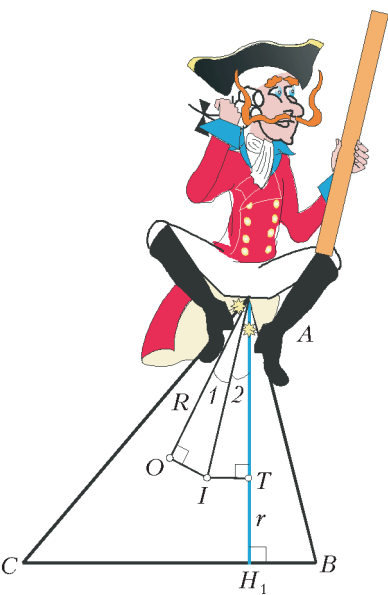


Рис. 8

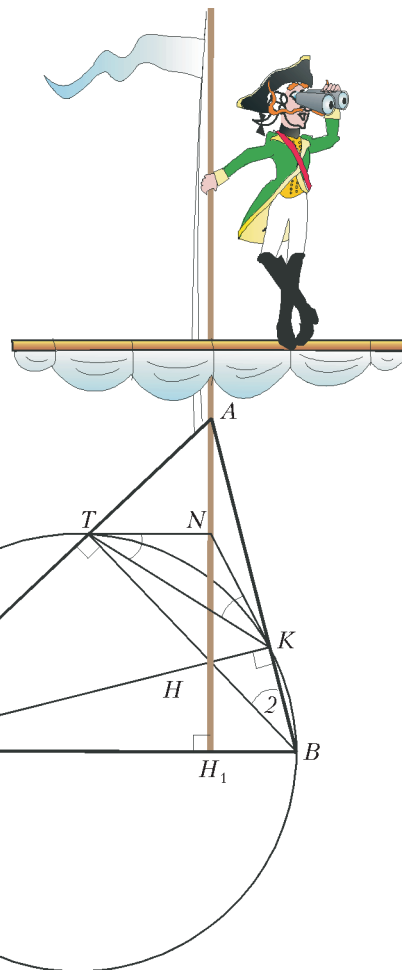


Рис. 10



ку  $BC$  – диаметр. Тогда  $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \angle A$  (соответственно из треугольников  $ACK$  и  $ABT$ ). При этом они вписанные, опираются на дугу  $TK$ . Значит,  $\angle NTK = \angle NKT = 90^\circ - \angle A$  (углы между касательной и хордой), тогда  $\angle KNT = 2\angle A$ . Поскольку к тому же  $KN = TN$  и  $\angle TAK = \frac{1}{2}\angle TNK$ , то точка  $N$  – центр описанной окружности треугольника  $ATK$ . Однако  $AN$  – диаметр этой окружности (в четырехугольнике  $ATNK$  два противоположных угла равны по  $90^\circ$ ). Следовательно,  $N$  – середина  $AN$ , а значит, эта точка лежит на высоте  $AN_1$ .

«Мне удалось найти крупнейшие сокровища флибустьеров, спрятанные в вершинах равнобедренного треугольника. Правда, потрудиться пришлось изрядно: я побывал практически во всех замечательных точках треугольника. Понадобилась даже помощь Аполлония и Эйлера – моих добрых друзей, после чего сокровища были найдены. А я, как всегда, оказался на высоте!..»

**Задача 10.** Постройте равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ) по центру  $I$  вписанной в него окружности, точке пересечения медиан  $M$  и точке пересечения высот  $H$ .

**Решение.** Очевидно, все три точки находятся на одной прямой, так как треугольник  $ABC$  – равнобедренный. Несложно найти и четвертую «замечательную» точку – центр  $O$  описанной около треугольника  $ABC$  окружности (рис. 11). Действительно, красивая теорема Эйлера утверждает<sup>1</sup>, что в любом треугольнике точка пересечения медиан  $M$ , точка пересечения высот  $H$  и центр описанной окружности  $O$  лежат на одной прямой (называемой *прямой Эйлера*), причем  $2OM = MH$ .

Известно, что биссектриса угла  $C$  является также биссектрисой угла  $OCH$  (см. лемму из задачи 7). Отношение отрезков  $\frac{CO}{CH}$  равно отношению отрезков  $\frac{OI}{IH}$  (по свойству биссектрисы). Оказывается, точки  $X$ , для которых отношение  $\frac{XO}{XH}$  постоянно (и равно отношению  $\frac{OI}{IH}$ ), – это точки некоторой окружности с центром на прямой  $OH$ , которая называется *окружностью Аполлония*<sup>2</sup>. Чтобы построить эту окружность, построим сначала точку  $I_a$ , делящую отрезок  $OH$  в этом же отношении вне-

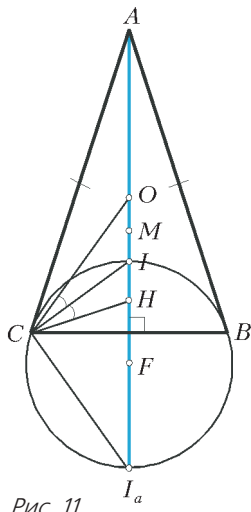


Рис. 11

пним образом, т.е.  $\frac{OI}{IH} = \frac{OI_a}{HI_a}$ . Тогда отрезок  $I_a$  будет диаметром нашей окружности. А ее центр  $F$  ( $IF = FI_a$ ) будет совпадать с точкой, симметричной точке  $H$  относительно основания  $BC$  (докажите). Тогда серединный перпендикуляр к  $HF$  пересекает окружность Аполлония в вершинах  $B$  и  $C$ . А окружность с центром  $O$  радиуса  $OC$  в пересечении с прямой  $AN_1$  дает недостающую вершину  $A$ .

Дабы не утомлять внимание читателей, некоторые из историй барона Мюнхгаузена мы сразу представим в виде задач для самостоятельного решения.

**Задача 11.** Мог ли барон, находясь, как всегда, на высоте  $AN_1$  треугольника  $ABC$ , находиться также на его стороне?

**Задача 12.** Пусть  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $T$  – середина медианы  $AM_1$ ,  $Q$  – точка, симметричная  $O$  относительно  $T$ . Докажите, что точка  $Q$  лежит на  $AN_1$ .

**Задача 13.** Около остроугольного треугольника  $ABC$  описана окружность. Касательные к ней в точках  $B$  и  $C$  пересекают касательную в вершине  $A$  в точках  $K$  и  $T$ . Докажите, что высота  $AN_1$  совпадает с биссектрисой угла  $KN_1T$ .

**Задача 14.** Однажды барон Мюнхгаузен находился, как всегда, на высоте  $AN_1$  и вместе с тем на прямой Симсона<sup>3</sup> треугольника  $ABC$ . Для какой точки треугольника это могло быть?

**Задача 15.** На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  как на хорде строятся окружности. Они пересекают  $AB$  и  $AC$  в точках  $K_i$  и  $T_i$  соответственно. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей всевозможных треугольников  $AK_iT_i$ .

(Ответ. Высота  $AN_1$  без точек  $A$  и  $N_1$ .)

**Задача 16.** Дан треугольник  $ABC$  и описанная около него окружность с центром  $O$ . При помощи одной линейки проведите высоту  $AN_1$ .

В заключение отметим, что барон Мюнхгаузен в своих мемуарах предлагает пытливым читателям провести исследование некоторых его историй.

Например, как быть, если в задаче 1 точки  $H_2$  и  $H_3$  тоже скрыты облаками?

А что, если в задаче 2 точка  $A$  будет расположена так, как на рисунке 12?

И так далее!..

Доступ к мемуарам барона Мюнхгаузена получил Г. Филипповский

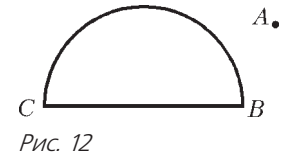


Рис. 12

<sup>1</sup> Доказательство этой непростой теоремы приведено, например, в статье И. Шарыгина и А. Ягубьянца «Окружность девяти точек и прямая Эйлера» в «Кванте» №8 за 1981 год.

<sup>2</sup> Подробнее об этом можно прочитать в статье Г. Филипповского «Досье» на окружность Аполлония» в «Кванте» №4 за 2004 год.

<sup>3</sup> Оказывается, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности треугольника на его стороны (или их продолжения), лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Симсона*. Подробнее о ней и других интересных фактах о геометрии треугольника вы можете прочитать в статье Д. Швецова в «Кванте» №6 за 2009 год.

# О работе, точке приложения силы и точильном круге

В. ПТУШЕНКО

Не сила пусть рождает уваженья,  
А правильная точка приложенья.

Из персидских рубайат

**П**ОНЯТИЕ РАБОТЫ СИЛЫ – ОДНО ИЗ ГЛАВНЫХ ПОНЯТИЙ механики. В школьном курсе физики в основном изучается механика материальной точки. А что нового может появиться при переходе к большим, или, как говорят физики, протяженным, телам, размерами которых уже нельзя пренебречь? На нескольких примерах постараемся показать те неожиданности, которые возникают при изучении работы сил над протяженными телами.

При встрече с любой физической задачей очень важно понимать те приближения и допущения, которые делаются для упрощения ее решения. Часто эти допущения скрыты в обычных словах, усыпляя нашу физическую бдительность. Поэтому будем обращать на них особое внимание.

Начнем с простейшей задачи. Идя по зимнему лесу, вы тащите за собой на санках товарища. Дорога ровная, прямая, горизонтальная, утоптанная, коэффициент трения  $\mu$  между полозьями и снегом постоянный. Тащите санки вы далеко, ну скажем с полкилометра, и не меняете при этом темпа. Как найти работу, которую вы совершаете? Переводя все сказанное о дороге и вашем движении по ней на физический язык, легко увидеть, что речь идет о прямолинейном равномерном движении материальной точки, на которую действуют постоянная сила трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и компенсирующая ее сила  $\vec{F}$ , с которой вы тянете санки (рис.1). Совершаемая вами работа против силы трения равна

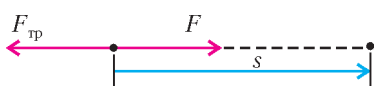


Рис. 1

где  $s$  – пройденный вами путь,  $m$  – масса вашего товарища вместе с санками.

$$A = (\vec{F} \cdot \vec{s}) = Fs = F_{\text{тр}}s = \mu mgs,$$

Будем понемногу менять условия. Что изменится, если вы захотите узнать совершенную вами работу не на всем пути, а за несколько первых шагов? Тогда санки уже нельзя рассматривать как материальную точку – их собственные размеры сопоставимы с величиной перемещения. Но если санки движутся поступательно, в самом решении ничего не изменится, и мы получим  $A = \mu mgs$ . Единственное, что здесь несколько изменилось по сравнению с первой задачей, это смысл величины  $s$ : теперь это уже не перемещение

материальной точки, а перемещение твердого тела (санок) при его поступательном движении. Это изменение пока выглядит не слишком существенным, однако в дальнейшем оно окажется более значительным, так что обратим на него внимание.

Итак, мы отказались от одного условия – малости системы, но вместо него появились два новых: твердость тела и поступательность его движения. Попробуем по очереди отказаться и от каждого из них.

Для начала привяжем к нашим санкам не веревку, а резиновый жгут – эспандер. Взявшись за кольцо эспандера, вы проходите с ним, например,  $s_1 = 5$  м, а его другой конец – который привязан к санкам – перемещается при этом всего на  $s_2 = 3$  м (рис.2). Как же здесь найти работу? На какое из этих двух перемещений умножать силу?

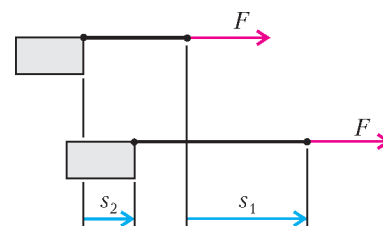


Рис. 2

А это зависит от того, какую работу вы ищите.

Если вас интересует работа, которую вы совершили над всей системой «эспандер-санки», то нужно брать перемещение той части эспандера, за которую держались вы (5 м в нашем случае). Если же эспандер вы в систему не включаете и интересуетесь только работой, совершенной над санками, то и под перемещением следует понимать перемещение только самих санок (3 м). Работы получаются разными, поскольку часть энергии (равная разности работ) запасается в эспандере. В нерастяжимой веревке (а при неравномерном движении важно еще, чтобы веревка была и невесомой) энергия не запасалась, поэтому и работы не различались (независимо от того, включали бы мы веревку в систему или нет).

Ну а если система более сложная и не разделяется так легко на подсистемы?

Если все ее части деформируемы, а сил на нее действует много? Принцип решения остается тем же самым:

- прежде всего, необходимо выделить ту систему (или ее часть), которая вас интересует (рис.3);

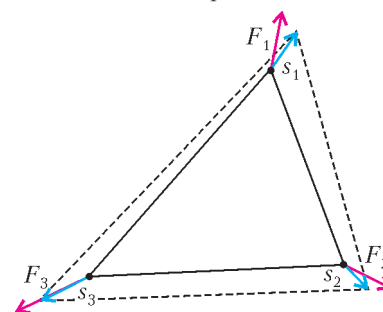


Рис. 3

- затем нужно указать все внешние по отношению к этой системе силы – их величины и точки их приложения;

- наконец, для каждой такой силы следует вычислить скалярное произведение силы на *перемещение ее точки приложения*; сумма всех таких произведений и даст полную работу всех внешних сил над вашей системой.

Может оказаться, что точек приложения внешних сил, действующих на систему, бесконечно много. Например, мыльная пленка, натянутая на рамку, стягивает ее, действуя каждым элементом своей границы на какой-то элемент рамки. Соответственно, по третьему закону Ньютона, на каждый элемент границы мыльной пленки действует сила со стороны рамки. Если вы растянете рамку, то все это бесконечное множество сил, действующих по границе пленки,

совершит работу, в сумме равную  $A = 2\sigma\Delta S$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, образующей пленку,  $\Delta S$  – изменение общей площади пленки в результате сделанных вами изменений размеров и формы рамки (попробуйте доказать это самостоятельно).

Теперь попробуем отказаться от поступательного движения. Оставим пока санки в покое и постараемся поднять бревно, лежащее у нас на пути. Будем поднимать бревно за один конец (другой неподвижно лежит на земле), усилие наше направим вертикально вверх (рис.4). Разные части бревна при таком движении, конечно, переместятся неодина-

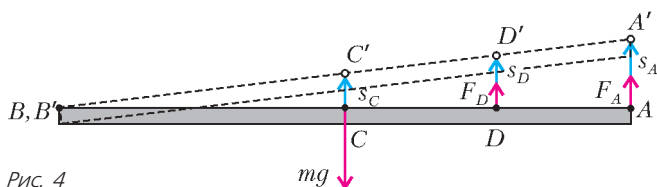


Рис. 4

ково. Каким же перемещением определяется совершаемая нами работа? Разумеется, перемещением  $\vec{s}_A$  точки приложения нашей с вами силы – в данном случае конца бревна. Если ваш товарищ попытается помочь вам, подхватив бревно рядом, например в точке  $D$ , то для определения совершаемой им работы нужно будет взять перемещение  $\vec{s}_D$  точки приложения его силы.

А сила тяжести? Как найти ее работу? Она ведь приложена к каждому элементу бревна, и у каждого из них свое перемещение. Однако если просуммировать все работы сил тяжести, приложенных к каждому такому элементу, то получится весьма простой и хорошо известный результат:  $A_{\text{тяж}} = (m\vec{g} \cdot \vec{s}_{\text{ц.тяж}}) = mgs_C$ , т.е. работа равна произведению силы тяжести всего бревна на перемещение его центра тяжести.

Таким образом, мы видим, что если не все части тела совершают одинаковые перемещения (тело деформируемое или движется не поступательно), то в формуле  $A = (\vec{F} \cdot \vec{s})$  в качестве  $\vec{s}$  нужно использовать перемещение *точки приложения силы*  $\vec{F}$ .

А теперь взглянем на самую запутанную ситуацию: что будет, если точка приложения силы *движется по поверхности тела*? Такая ситуация может возникнуть во многих случаях: тормозные колодки, останавливающие вращение колеса; резец токарного станка, подведенный к вращающейся детали; лезвие ножа, прислоненное к точильному кругу...

Посмотрим повнимательнее на точильный круг: когда вы касаетесь его ножом, то между ножом и кругом возникает сила трения, однако точка приложения силы остается все время на одном и том же месте, она не движется! А раз перемещение точки приложения силы равно нулю за любой промежуток времени, то должна быть равна нулю и совершаемая этой силой работа. Но ведь круг, когда вы прижимаете к нему нож, постепенно замедляет вращение, теряет свою кинетическую энергию, а значит, над ним совершается какая-то ненулевая (отрицательная в данном случае) работа.

Бывает и наоборот: точка приложения силы движется, а работа при этом не совершается. Именно так происходит, например, при скатывании колеса с наклонной плоскости без проскальзывания (рис.5). Сила трения, возникающая между колесом и плоскостью, приложена к точке их мгновенного касания (точка  $A$  на рисунке 5), которая движется вместе с колесом вниз вдоль плоскости. Тем не менее, несмотря на то что скалярное произведение силы трения и перемещения ее

точки приложения не равно нулю, никакой работы эта сила не совершает, а все изменение кинетической энергии колеса к концу горки целиком происходит за счет работы силы тяжести.

Почему же так получилось? Физическая интуиция нам подсказывает, что мы не на то смотрели, т.е. не на ту точку, и потому не тот смысл вложили в величину перемещения  $\vec{s}$ . Как только *точка приложения силы* стала «путешествовать» по телу, оказалось, что в этом понятии есть несколько разных смыслов. С одной стороны, это точка *пространства*, в которой в данный момент происходит контакт двух тел, приводящий к возникновению силы. С другой стороны, это точка *тела*, оказавшаяся в этот момент в месте контакта.

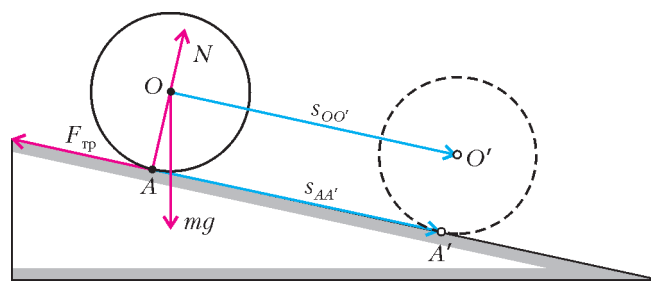


Рис. 5

Разумеется, в каждый момент времени они совпадают друг с другом, находятся в одном и том же месте, но при этом двигаться они могут по-разному!

В случае с ножом и точильным кругом точка их контакта остается постоянно в одной и той же точке пространства (т.е. она неподвижна), в то время как каждая точка-элемент точильного круга, с которой происходит контакт, движется. И движение именно ее – физической, материальной точки – и должно быть принято во внимание при определении работы над кругом. Есть, кстати, еще и третья точка – точка-элемент ножа, которая контактирует с кругом и создает действующую на него силу. Если нам потребуется найти работу, производимую над ножом точильным кругом, то именно ее (этой точки-элемента ножа) движение придется для этого учитывать. В данном случае она тоже неподвижна, поэтому и механическая работа, совершаемая над ножом, равна нулю (нож, если мы его держим крепко, остается на месте, т.е. не меняет свою кинетическую энергию).

Итак, физическая интуиция подсказала нам верный путь – учитывать движение точки тела. Но как это сделать? В определении работы ( $A = (\vec{F} \cdot \vec{s})$ ) входит перемещение, поэтому, чтобы найти элементарную работу силы над материальной точкой, необходимо определить перемещение этой точки. А какие перемещения совершают точки точильного круга в момент их прохождения через точку контакта с ножом? В том-то и дело, что никакие! Ведь уже в следующий момент времени точка точильного круга перестает быть точкой приложения силы. *Ни для одной точки точильного круга не существует ни одного конечного участка пути, на котором она оставалась бы точкой приложения силы.* Иными словами, само понятие перемещения, входящее в определение работы, теряет смысл, когда точка приложения силы начинает перемещаться по телу. Как же преодолеть это затруднение?

Тут может быть много разных путей. Один из них – понять, почему мы пришли к такой ситуации, когда теряют смысл самые обычные, казалось бы, понятия? Да потому, что мы представили себе контакт двух тел *точечным*, беско-

нечно маленьким. Разумеется, это лишь приближенное представление о физической реальности. Во многих случаях оно оказывается совершенно достаточным для понимания сути явления и его правильного описания, но здесь оно подвело нас. Благодаря тому что два тела касаются друг друга и создают силу не в точке, а на *конечной* (хотя, возможно, и очень маленькой) *площади*, каждый принадлежащий ей элемент тела успевает пройти какой-то конечный путь под действием силы. Сила успевает совершить над ним работу. Из этих – пусть маленьких, но все же уже ненулевых – величин и может складываться работа, совершаемая над телом.

Таким образом, чтобы аккуратно, последовательно учесть в расчете работы движение материальных точек тела, можно отказаться от упрощенного представления о точечном контакте взаимодействующих тел, рассмотреть движение всех точек в области контакта и найти суммарную работу. Этот путь не так уж сложен, как кажется, – в конечном итоге он даст результат, не зависящий от размеров и каких-либо особенностей области контакта тел. (Иными словами, рассмотренная нами конечная область контакта важна для физически осмысленного описания процесса совершения работы, но не важна для конечного результата.)

Но что делать, если мы не хотим задумываться о протяженности области контакта двух тел? Есть ли здесь какие-то обходные пути, которые позволили бы нам решить задачу, ни на минуту не отказываясь от удобной модели точечного контакта? Да, есть. Понятие перемещения доставило нам столько неудобств потому, что оно, по своему смыслу, описывает процесс *на промежутке*. Вот если бы вместо него найти такую величину, которая бы описывала величину *в точке*...

А что если попробовать взять не перемещение точки тела, а ее скорость и умножить силу, действующую на точку, на эту скорость? Да ведь это же мощность!

Получается, что работу над точкой тела, становящейся лишь на миг точкой приложения силы, мы формально найти не можем, но вот найти мощность, развиваемую силой, действующей на точку, – пожалуйста. А умножив мощность на нужный промежуток времени, мы как раз и получим работу!

Конечно, это не единственный возможный вариант, как обойтись с «непослушной» работой в таком непростом явлении, как действие на тело силы со скользящей точкой приложения. Попробуйте придумать свой способ, который, возможно, покажется вам удобнее.

## Увеличительная линейка

**В. ДРОЗДОВ**

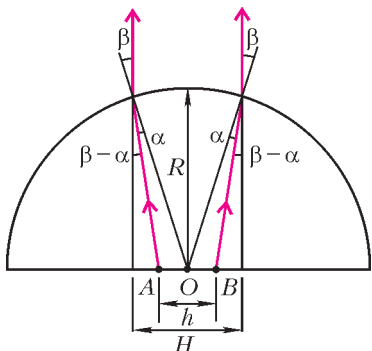
В ОТДЕЛЕ ОПТИКИ ОДНОГО РЯЗАНСКОГО ТОРГОВОГО дома я увидел небольшую продолговатую картонную коробочку с надписью «BAR MAGNIFIER». Поинтересовался, что это. Оказалось – стеклянный полуцилиндр высотой 12 мм и длиной 150 мм, используемый для увеличения размеров букв в печатном издании. И действительно, в буквальном переводе название прибора означает «увеличительный брусок» (или «увеличительная полоска»).

Пользоваться увеличителем предписано так: передвигать по бумаге сверху вниз листа, при этом читаемая строчка должна находиться на оси цилиндра, половиной которого и является эта оптическая линейка.

Обнаружилось, что двухмиллиметровая буква кажется трехмиллиметровой, т.е. увеличение составляет 1,5. По-

скольку 1,5 – типичный показатель преломления стекла, то возникла гипотеза: увеличение линейки равно показателю преломления стекла. Осталось теоретически подтвердить или опровергнуть эту гипотезу.

На рисунке изображено сечение увеличительной линейки плоскостью, перпендикулярной как



плоской поверхности линейки, так и ее оси. Рассмотрим соответствующий ход лучей. Один из них идет в наш глаз от верхней точки *A* некоторой буквы текста, другой – от нижней точки *B* этой буквы. Середина *O* буквы находится на оси. Обе высоты буквы – реальная *h* и увеличенная *H* – значительно меньше радиуса полуцилиндра *R*, поэтому углы  $\alpha$  и  $\beta$  (падения и преломления лучей) можно считать малыми.

Из рисунка видно, что увеличение буквы равно

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{H/2}{h/2} = \frac{R \sin \beta}{R \sin \beta - R \sin(\beta - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta - \sin(\beta - \alpha)}$$

Учтем, что синус малого (по сравнению с одним радианом) угла можно отождествить с его радианной мерой, и получим

$$\Gamma = \frac{\beta}{\beta - (\beta - \alpha)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Теперь запишем закон преломления света на цилиндрической поверхности увеличительной линейки. В нашем случае свет переходит из оптически более плотной среды с показателем преломления *n* в воздух, у которого показатель преломления равен единице. Поэтому закон преломления будет выглядеть так:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n}$$

откуда

$$n = \frac{\beta}{\alpha}$$

Таким образом,  $\Gamma = n$ , т.е. наша гипотеза подтвердилась.

В заключение сделаем числовой расчет. В условиях опыта  $\sin \beta = \frac{H}{2R} = \frac{1}{8}$ . Тогда  $\beta = 0,125329$  рад  $\approx 7,18^\circ$ . Точность приближенного равенства  $\sin \beta \approx \beta$  составляет 0,26%. А точность равенства  $\sin \alpha \approx \alpha$  еще выше ( $\alpha = 4,78^\circ$ ). С целью лучшего восприятия рисунка углы  $\alpha$  и  $\beta$  на нем сильно увеличены.

# О теплопередаче и не только

**А. КРАСНОЧУБ**

*Измеряй все, что можно измерить, и делай измеримым то, что не поддавалось измерению!*

Г. Галилей

ДО ПОСЛЕДНЕГО ВРЕМЕНИ В ИНФОРМАЦИОННОМ МИРЕ, когда необходимо было представить науку, СМИ обычно использовали следующие клише: сложные установки со множеством трубок и проводов, дисплеи, экраны осциллографов и т. п., а ученые, как правило, это умудренные старцы с бородами и потусторонним взглядом. На самом деле реальность, как всегда, сильно отличается от интерпретации журналистов. Так, Томсону, будущему лорду Кельвину, было 24 года, когда он ввел абсолютную шкалу температур. Ньютону было столько же, когда он за два года разработал идеи, которые привели его к созданию дифференциального и интегрального исчисления, изобретению зеркального телескопа, открытию закона всемирного тяготения.

И это не единичные примеры, это правило. Науку делают молодые люди, обладающие потрясающей способностью мыслить ясно и просто.

А к чему приводят эти два мифа – сложности и старости?

К тому, что когда молодой человек к 24–25 годам заканчивает вуз, он боится мыслить самостоятельно. Постоянно пользуясь «костылями» затвердевших знаний, пытается выудить ответы на возникающие в работе вопросы из лекций или учебников, а при обсуждении норовит спрятаться за авторитетное мнение.

Эта статья – попытка дать возможность школьнику самому почувствовать и понять, что такое наука и что такое научный поиск.

Не хочется ради популяризации сочинять свое определение науки, поэтому интересующимся строгим определением можно порекомендовать ознакомиться с монографиями по основам и методологии науки. Для дальнейшего повествования нам понадобится только то, что наука – это, прежде всего, *система* знаний, базирующаяся *на опыте* и имеющая дело с *воспроизводимыми* явлениями. По крайней мере, это относится к естественным наукам.

В строгих определениях науки нет ничего о жажде знаний, незатухающей любознательности и способности удивляться и восхищаться явлениями и их взаимосвязям в окружающем нас мире. К сожалению, эта часть работы и жизни ученых обычно остается на откуп биографам или журналистам. И лишь только если повезет и человек науки оставит после себя помимо научных трудов дневники и мемуары, мы сможем увидеть страсти и эмоции, которые обычно скрываются за точными формулировками научных статей.

Однако, как говорил П. Л. Капица, «научный подход это отсутствие эмоций», поэтому отбросим эмоции и займемся делом.

## Что будем рассматривать?

В качестве примера предлагается рассмотреть процесс остывания кружки кипятка. Какой интерес может представлять «банальная» задача охлаждения? С одной стороны, это наиболее подходящий и простой пример, который каждый из вас может повторить и развить самостоятельно. А с другой стороны, если задуматься, то в жизни часто приходится сталкиваться с законами охлаждения и нагрева. Достаточно открыть паспорт на любую бытовую технику (не говоря уже о промышленном оборудовании) – и вы с легкостью найдете ограничения по рабочим температурам и температурам хранения. Так или иначе, иногда весьма полезно уметь заранее что-то предсказать, так почему бы не начать с задачи передачи тепла? Если вы освоите сам подход, то сможете потом заняться любым вопросом, который интересен вам.

Итак, мы хотим знать, как остывают нагретые тела. Что значит «знать»? С точки зрения физики, это значит написать уравнение процесса, с точки зрения техники – предсказать температуру тела, помещенного в конкретные условия, через определенный промежуток времени. Что делать, если хотеть-то мы хотим, а ответа не знаем? Наверное, первая мысль – спросить опытного человека. Хотя, что такое опытный человек? К тому же, его может и не оказаться рядом. Другая идея – посмотреть справочник, почитать книги. Да, это так, но только если кто-то уже написал этот справочник или книгу. А если нет? Если вы не собираетесь всю жизнь быть вторым, третьим и т. д., то очевидно, что рано или поздно вы столкнетесь с чем-то, что будет впервые. Неплохо к этому подготовиться.

Допустим, что справочников нет, спросить некого, а мы очень хотим разобраться, как быстро остынет кружка кипятка. Что же нам делать? Самое простое решение – взять кружку с кипятком, опустить в нее термометр и фиксировать температуру через определенные промежутки времени.<sup>1</sup> В результате этого простого опыта мы получим определенную зависимость температуры от времени (рис. 1). Теперь для данной конкретной кружки с данным конкретным количе-

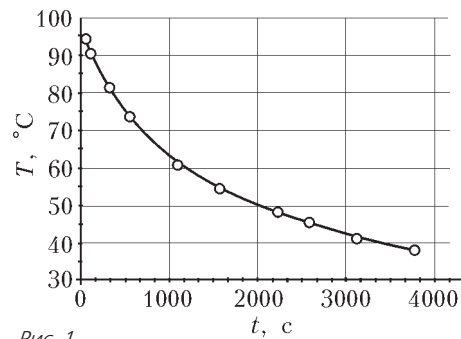


Рис. 1

ством кипятка мы можем предсказать, что кипяток остынет до 50 °C примерно за полчаса. Аналогичные кривые можно получить для разных количеств кипятка и при различных температурах окружающей среды.

Далее, предположим, что наш чайник готовит только  $x$  кг кипятка, а мы хотим получить  $2x$  кг воды при определенной температуре. Сможем ли мы этого добиться? Придется разобраться с тем, как происходит охлаждение.

<sup>1</sup> Все описываемые здесь результаты были получены для цилиндрической емкости высотой 5 см, диаметром 14 см и толщиной стенок 2 мм, изготовленной из полиэтилена.

Полученная нами зависимость температуры от времени с трудом поддается анализу. Как она себя поведет при изменении формы сосуда? А при обдуве? И вообще, легко анализировать только прямые пропорциональные зависимости. В этом случае вы всегда можете сказать, что если одна величина изменилась на  $\Delta x$ , то зависящая от нее величина изменится на  $k\Delta x$ . Поэтому обычно после того, как получены экспериментальные результаты, наступает этап рассуждений и дискуссий, цель которых выявить, каким уравнениям удовлетворяют полученные экспериментальные факты. Давайте и мы порассуждаем.

### Обсуждение полученных результатов

Пусть у нас есть некое количество воды массой  $m$  с температурой  $T$  при температуре окружающей среды  $T_0$ .

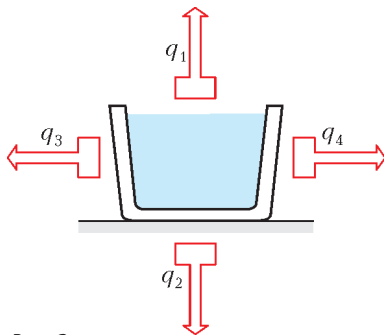


Рис. 2

Если  $T > T_0$ , то наш сосуд, очевидно, теряет тепло (рис.2; здесь  $q_i$  – поток тепла от различных поверхностей сосуда). От чего может зависеть остывание, а точнее передача тепла от нагретого тела к ненагретому или в более холодное окружающее пространство? Конечно, от поверхности контакта и от среды между телами. Представим себе два сосуда с одинаковыми полостями А и Б и допустим, что в полость А налита горячая вода, а в полость Б – холодная (рис.3). Очевидно, что выравнивание температур будет сильно зависеть от материала, из которого сделаны эти сосуды. Также очевидно, что в сосуде 1 температуры сравняются быстрее, чем в сосуде 2. (Если не очевидно, то поступают

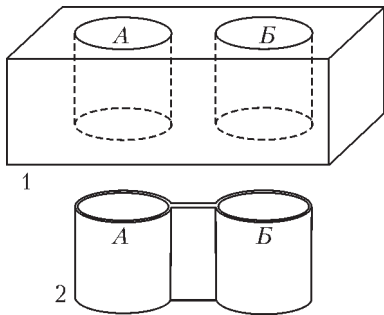


Рис. 3

просто – все сделанные предположения рассматривают как гипотезы и проверяют их экспериментально.) Однако если в течение всего эксперимента использовать одну и ту же емкость, то площадь контакта с окружающей средой будет всегда одной и той же, собственно как и окружающая среда. Поэтому можно отбросить из рассмотрения эти факторы.

От чего еще может зависеть охлаждение? Если мы внимательно посмотрим на график на рисунке 1, то увидим, что чем меньше температура, тем медленнее идет процесс охлаждения. Другими словами, чем меньше температура тела, тем дольше оно будет остывать, например, на  $5^\circ\text{C}$ . Очевидно также, что когда температура воды сравняется с комнатной, процесс теплопередачи прекратится. Напрашивается предположение, что поток тепла с единицы площади поверхности пропорционален разности температур нашей емкости и окружающей среды и равен  $q_s = \alpha(T - T_0)$ , а полный поток тепла составляет  $q = \alpha S(T - T_0)$ , где  $S$  – площадь поверхности контакта.

Чтобы двигаться дальше, надо все-таки что-то знать – например, закон Джоуля, из которого следует, что если у

тела отнять количество теплоты  $Q$ , то его температура изменится на  $\Delta T = -\frac{Q}{cm}$ , где  $c$  – удельная теплоемкость, а  $m$  – масса тела. (Хорошо, если бы вы подумали, как это можно доказать, или хотя бы посмотрели, как это делал Джоуль. Заодно обратите внимание на то, в каком возрасте он это доказал.)

Таким образом, согласно сделанным предположениям, за малое время  $\Delta t$  тело отдаст окружающей среде количество теплоты  $\alpha S(T - T_0)\Delta t$ , и температура тела изменится на

$$\Delta T = -\frac{\alpha S(T - T_0)\Delta t}{cm}$$

Здесь мы неявно предполагаем, что процесс выравнивания температуры в воде намного быстрее процесса передачи тепла окружающему пространству. Для дальнейшего понадобится еще и знакомство с понятием производной. По крайней мере, надо знать, что производная функции в точке есть тангенс угла между касательной к графику функции в этой точке и осью абсцисс.<sup>2</sup> Перепишем выражение для  $\Delta T$  в виде

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{\alpha S(T - T_0)}{cm}$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  в левой части равенства мы получаем производную температуры по времени, а из правой части видно, что эта производная прямо пропорциональна разнице температур тела и окружающей среды. Другими словами, если сделанные нами предположения верны, то тангенс касательной к графику на рисунке 1 прямо пропорционален разнице температур. Этот вывод можно проверить, воспользовав-

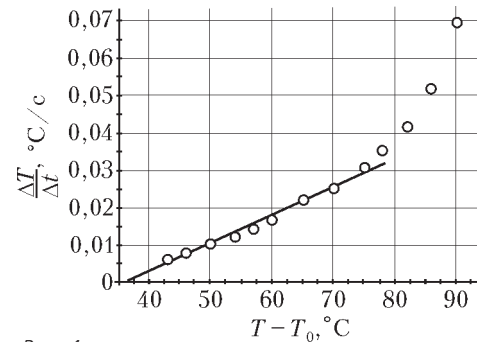


Рис. 4

шись рисунком 1.<sup>3</sup> В результате мы получим кривую, изображенную на рисунке 4, откуда следует, что при температуре воды меньше  $70-75^\circ\text{C}$  с точностью до ошибки эксперимента и обработки полученных данных скорость остывания пропорциональна разнице температур воды и окружающего пространства. Однако при температурах больше  $75^\circ\text{C}$  наша теория, очевидно, неверна.

<sup>2</sup> Следует заметить, что если какая-либо интеллектуальная активность человека не использует математику, то это не наука. Может, это искусство или что-то еще, но точно не наука.

<sup>3</sup> Если вы будете делать эту операцию без помощи компьютерных методов обработки данных, рекомендуется быть предельно аккуратным и лучше снять побольше точек для зависимости  $T(t)$ , построить их в крупном масштабе на миллиметровке и только потом приступить к проведению касательных и определению тангенса угла наклона. Вычисление производной по дискретным точкам – деликатная операция, и вы можете легко ошибиться и получить зависимость, которая не имеет никакого отношения к действительности.

Снова к началу

Что же делать дальше? Опять строить гипотезы, а затем опять их проверять – до тех пор, пока явление не будет объяснено полностью. Сейчас нам интересно выяснить, что происходит в диапазоне температур 75–100 °С. Явно здесь действует какой-то другой режим передачи тепла.

Вспомним, как причудливо поднимается воздух над костром или как образуется марево над очень нагретыми, раскаленными предметами. Воздух весь дрожит и вихрится. Может, это движение горячего воздуха и приводит к более быстрому охлаждению тела при температурах больше 75 °С?

Физика такого процесса достаточно проста. Рассмотрим слой воздуха, прилегающий к телу. Если скорость передачи тепла от тела к этому слою больше, чем между этим и последующим слоями воздуха, то прилегающий к телу воздух нагревается. При этом он расширяется, плотность его уменьшается, и возникает архимедова сила, толкающая его вверх. В какой-то момент слой прогретого воздуха отрывается от поверхности тела и уносится вверх, а на его место опускается порция холодного воздуха. Если приглядеться, то можно заметить, что образующиеся вихри имеют характерный размер, сравнимый с размерами тела. (Понаблюдайте за паром из носика чайника, сравните его с клубами пара от градирен ТЭЦ в морозный день, посмотрите на вихри от дымовых труб.) А если это так, то мы можем предположить, что возникает ситуация, показанная на рисунке 5. В отсутствие преград (случай *a*; вид сбоку) над

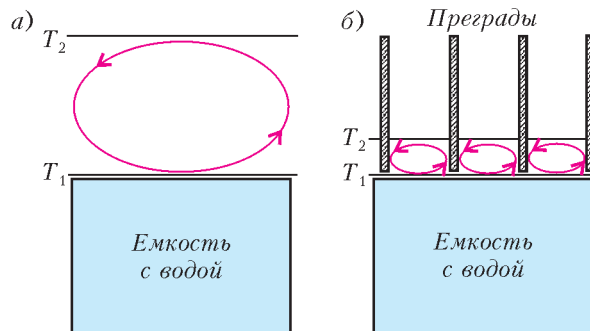


Рис. 5

нагретым телом образуется большой вихрь с диаметром, приблизительно равным диаметру самого тела, а если есть преграды (случай *b*; вид сбоку), то будут образовываться более мелкие вихри. Можно предположить, что во втором случае разница между температурами  $T_1$  и  $T_2$  будет меньше, чем в первом случае, и процесс передачи тепла будет происходить медленнее. Иными словами, мы можем исследовать, влияет ли движение воздуха над нагретым телом или нет, сравнив, как происходит охлаждение при открытой поверхности и с внесенными преградами. В наших экспериментах для создания преград сосуд был обернут листом ватмана, в который набивались трубки двух диаметров: 25 и 4 мм.<sup>4</sup> Результат представлен на рисунке 6. Из полученных данных можно заключить, что только очень тонкие трубки начинают влиять на процесс остывания, но в целом картина не меняется. Отсюда следует простой вывод – на начальном этапе охлаждения работает какой-то другой механизм, и надо предложить новую гипотезу.

<sup>4</sup> Очень подходят соломинки для коктейлей. Можно также использовать спагетти.

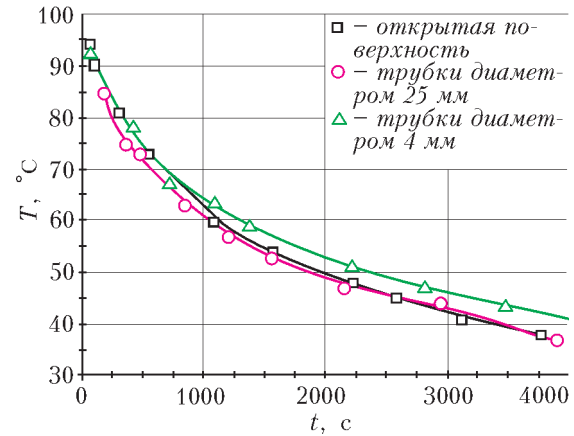


Рис. 6

Если мы были наблюдательными, когда проводили опыты, то могли заметить, что в начале процесса остывания над водой поднимается пар, а в конце эксперимента воды в сосуде всегда меньше, чем было в начале. Так может быть, именно парообразование приводит к быстрому охлаждению воды?

Чтобы это проверить, надо устранить образование пара, для чего достаточно закрыть сосуд крышкой или, что более изящно, налить на поверхность кипятка масло. Масло не кипит при 100 °С, а значит не происходит процесс парообразования, и, как известно, масло растекается по воде тонкой пленкой – поэтому не требуется большого его количества для покрытия всей поверхности воды. Иными словами, масло не вносит значительной погрешности в эксперимент, так как не требует больших затрат энергии на собственный разогрев. Проведя эксперимент и с крышкой, и с пленкой масла, получим графики, изображенные на рисунке 7. Таким образом, можно считать доказанным от противного, что быстрый

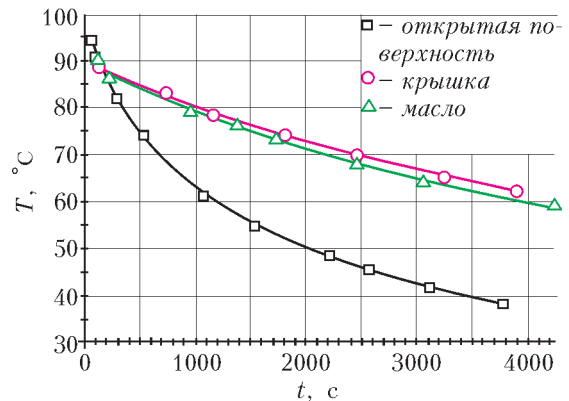


Рис. 7

спад температуры в начале остывания происходит именно за счет парообразования.

Обозначив через  $\Delta V$  объем испарившейся жидкости, мы можем оценить работу  $A$  выхода одной молекулы, предположив, что энергия, которую потерял весь объем воды, была потрачена на испарение. В этом предположении верно равенство  $A = \frac{cm(T_1 - T)}{\Delta V n_0}$ , где  $T_1 = 100$  °С,  $T = 75$  °С, откуда (зная характерные значения объема испарившейся жидкости  $\Delta V$  и количества молекул в единице объема  $n_0$ ) получаем оценку  $A \approx 3 \cdot 10^{-20}$  Дж.

### Еще немножко рассуждений

Теперь углубим рассмотрение. Для этого нам понадобится знание о молекулярном строении вещества и о том, что энергетическое распределение молекул подчиняется закону Больцмана: количество молекул с энергией  $\Phi$  равно  $n = n_0 e^{-\frac{\Phi}{kT}}$ , где  $T$  – температура,  $k$  – постоянная Больцмана,  $n_0$  – количество молекул в единице объема в том месте, где их энергия равна нулю.<sup>5</sup>

Рассмотрим маленький объем воды у поверхности. Для того чтобы молекула перешла из жидкости в пар, она должна преодолеть поверхностные силы и совершить некоторую работу  $A$ . Очевидно, что объем теряет эту энергию вместе с молекулой. Если бы мы знали значение этой энергии и количество молекул, покидающих воду в единицу времени, то смогли бы оценить скорость потери тепла из-за парообразования. Попробуем сделать это.

Разделим хаотичное движение молекул в воде по трем направлениям (осям), одно из которых перпендикулярно плоскости раздела пар–вода, два других параллельны этой плоскости. Так как молекулы равновероятно могут двигаться как по направлению к границе раздела, так и от нее, то всего у нас есть 6 групп молекул по две на каждое из трех направлений. Таким образом,  $\frac{1}{6}$  всех молекул движется по направлению к границе раздела. Конечно, это грубая оценка, но зато она понятна. (Если вспомнить, как выглядит улица мегаполиса, где всего одна ось и две возможности движения вперед и назад, то можно признать, что предлагаемые 6 групп есть весьма хорошее приближение хаоса.)

И наконец, нам понадобится знание того, что температура есть мера средней кинетической энергии движения молекул:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_0v^2,$$

где  $m_0$  – масса молекулы,  $v$  – средняя скорость молекул.

Если мы рассмотрим площадку размером  $s$  на границе раздела пар–вода, то за время  $\Delta t$  в среднем на нее налетит  $\frac{1}{6}$  всех молекул, содержащихся в объеме  $\Delta t v s$ . В пар перейдут молекулы, энергия которых больше  $A$ . Другими словами, количество молекул, переходящих в пар, равно

$$n_A = \frac{1}{6} n_0 \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} e^{-\frac{A}{kT}} \Delta t s_2,$$

где вместо  $s$  подставлена площадь  $s_2$  открытой поверхности воды в нашем сосуде. В выражении для  $n_A$ , во-первых, мы не знаем только значение  $A$ , а во-вторых, мы видим, что с понижением температуры количество молекул, покидающих жидкость, быстро уменьшается.

Вот теперь мы можем вернуться к рисунку 4 и сделать предположение, что при  $T \approx 75^\circ\text{C}$  поток тепла, уносимый парообразованием, сравнивается с обычной теплопередачей. Тогда мы можем записать:  $\alpha S_1 (T - T_0) \Delta t = A n_A$ , где  $S_1$  – полная площадь поверхности сосуда. Если обозначить коэффициент пропорциональности, найденный из рисунка 4, через  $K$ , то из наших экспериментов и рассуждений мы знаем, что  $\alpha S_1 = c m K$ , а  $K = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ .

Итак, окончательно мы получаем

$$c m (T - T_0) = A \cdot \frac{1}{6} n_0 \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} e^{-\frac{A}{kT}} s_2. \quad (*)$$

Это – трансцендентное уравнение относительно  $A$ , все остальные параметры нам известны. Такое уравнение можно решить любым доступным способом, например графически (рис.8). Мы видим, что уравнение имеет два корня:  $A_1 = 8 \cdot 10^{-20}$  Дж и  $A_2 = 2 \cdot 10^{-27}$  Дж. Согласно сделанной

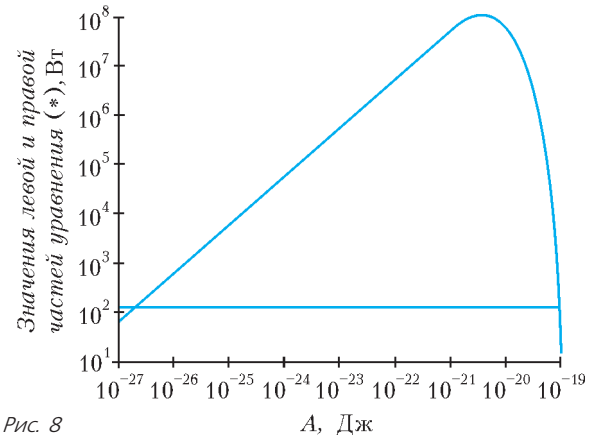


Рис. 8

ранее грубой оценке, искомым корень – это  $A_1$ . Разделив его на массу молекулы воды, находим удельную теплоту парообразования:  $\frac{A_1}{m_0} = \lambda = 2,7 \cdot 10^6$  Дж/кг, а справочное значение этой величины  $2,2 \cdot 10^6$  Дж/кг. Мы получили весьма удовлетворительное совпадение, несмотря на не очень строгие рассуждения и простоту эксперимента.

### Резюме

На самом элементарном примере было проиллюстрировано, как выглядит изнутри путь научного поиска и как он проходит. Сначала возникает вопрос, который должен разжечь любознательность настолько, что вы готовы докопаться до сути и даже сделать ради этого какие-то, иногда весьма значительные, телодвижения. Затем начинается процесс генерации гипотез и идей и их экспериментальной проверки. Потом идет анализ полученных данных, снова генерация идей и опять их проверка на опыте. Главное – это способность мыслить, строить гипотезы и выдвигать идеи, а набор знаний важен, конечно, но он скорее вторичен. В принципе, знания можно получать напрямую самому.

Надеемся, что описанный здесь путь понятен, и вы сможете с его помощью решать и другие вопросы, которые вам интересны.

<sup>5</sup> Об этом можно прочитать в книге Я.А.Смординского «Температура» (Библиотечка «Квант», вып.12 или вып.103). А еще лучше подумать самим, как обосновать эти допущения.



# ДВА ЭТЮДА О ДИНАМИКЕ

Е. СОКОЛОВ

Иногда говорят, что «ДИНАМИКА» – это очень сложная школьная тема. В ней много трудных задач, решение которых требует времени и сил. А сами задачи динамики чрезвычайно разнообразны. И это правда.

Предлагаем вам два сюжета по динамике. Надеемся, что после знакомства с ними некоторые сложные вопросы этой темы станут для вас более простыми и понятными.

## Этюд 1. Объединяй и разъединяй

Однажды перед контрольной по динамике, когда весь материал был уже пройден и было решено много задач, наш учитель физики испытующе посмотрел на нас и сказал:

– Знаете, ребята, мы с вами научились решать задачи методически выверено. А что если сегодня мы поучимся другому – решать задачи *быстро*?

Конечно, никто возражать не стал – это же очень полезно быстро решать задачи.

– Вот вам первая задача. Только, чур, решаем ее быстро. Попробуйте сразу же написать ответы.

**Задача.** Четыре тела массами  $m$ ,  $2m$ ,  $3m$  и  $4m$ , связанные невесомыми нерастяжимыми нитями, движутся под действием силы  $F$  (рис. 1). Найдите ускорения тел и натяжение указанной на рисунке нити, если  $m = 1$  кг,  $F = 20$  Н. Трения нет.

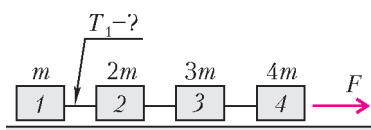


Рис. 1

Конечно, решать такие задачи мы уже научились. Только вот беда – когда на рисунках появляются «паровозики», решения становятся очень длинными. Ведь теперь надо несколько раз делать расстановку сил, для каждого тела в отдельности, и второй закон Ньютона записывать несколько раз. А после всего этого придется еще и решать систему уравнений. Так что мы были единодушны – решить такую задачу *быстро* никак не получится. И вообще, как это просто так взять и написать ответ?

Однако через некоторое время у трех самых смелых наших товарищей в тетрадах появилась формула:

$$a = \frac{F}{10m} = \frac{20 \text{ Н}}{10 \text{ кг}} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Только вот было похоже, что сами они в нее не очень-то и верили. А второго ответа, для силы натяжения нити, так никто написать и не смог.

– Ну что же, один ответ есть. Неплохо, – просмотрев тетради, сказал наш учитель. А годится ли такое простое решение? «Настоящее» ли оно? Доказать ответ вы можете?

Конечно, никаких доказательств у нас не было.

– Эх вы! Смотрите, как просто доказывается правильность вашего решения. Скажите, что у нас изображено на рисунке 1?

– Как что? Четыре тела, связанные нерастяжимыми нитями.

– Действительно, это так. Но по условию задачи нити нерастяжимы. А это означает, что все тела движутся с одним и тем же ускорением, как единое целое. Поэтому можно сказать, что перед нами не четыре тела, а одно тело сложной формы (рис.2). Во втором законе Ньютона ничего не сказано



Рис. 2

о форме тела, и мы имеем полное право записать для «паровозика» второй закон Ньютона в таком виде:

$$a = \frac{F}{m_{\text{общая}}} = \frac{F}{10m} = \frac{20 \text{ Н}}{10 \text{ кг}} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ получен. Вот как работает слово «объединяй»!

– А теперь поговорим о слове «разъединяй». Для того чтобы ответить на второй вопрос задачи, мы вернемся к тому, что имеем дело не с одним, а с четырьмя телами. И давайте рассмотрим движение тела под номером 1. Масса этого тела нам известна, ускорение тоже. Осталось уточнить, под действием какой силы оно движется. Ваше мнение?

– Конечно, под действием силы  $\vec{F}$ ! – закричали наши смельчаки.

– Стоп! Стоп! Стоп! То, что вы говорите, – ошибка. И ошибка эта очень распространенная. Разъясню.

Конечно, первопричиной движения всех тел действительно является сила  $\vec{F}$ . Но приложена эта сила не к нашему телу 1, а к самому правому телу 4. А про тело 1 мы должны говорить, что оно движется под действием силы натяжения первой нити. Доказательство? Перережьте эту нить, и тело 1 двигаться не будет. Именно эта нить приводит тело 1 в движение. Вот почему правильно говорить, что тело 1 движется под действием силы натяжения  $\vec{T}_1$ .

Разобравшись с этим главным вопросом, мы теперь можем выписать второй ответ. Записываем для тела 1 второй закон Ньютона (рис.3) и получаем

$$T_1 = m_1 a = 1 \text{ кг} \cdot 2 \text{ м/с}^2 = 2 \text{ Н}.$$

Вот как работает слово «разъединяй»!

– А теперь несколько полезных советов.

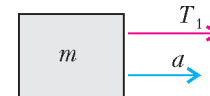


Рис. 3

Группировать тела мы можем по своему вкусу. Например, для нахождения силы натяжения второй нити можно рассматривать движение различных тел. Возможные варианты приведены на рисунке 4. Решение будет проще, если выбрать

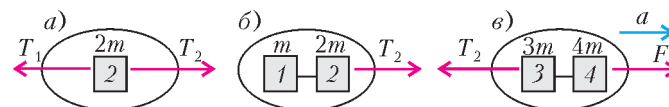


Рис. 4

вариант б) – два тела рассматриваем как одно. Все-таки массы складывать легче, чем силы. Масса такого тела равна  $m_1 + m_2$ , движется оно с ускорением  $\vec{a}$  под действием одной силы  $\vec{T}_2$ . Второй закон Ньютона дает

$$T_2 = (m_1 + m_2) a = 3 \text{ кг} \cdot 2 \text{ м/с}^2 = 6 \text{ Н}.$$

Для определения силы натяжения третьей нити удобно рассмотреть три тела как одно. Для них получаем

$$T_3 = (m_1 + m_2 + m_3) a = 6 \text{ кг} \cdot 2 \text{ м/с}^2 = 12 \text{ Н}.$$

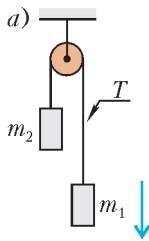
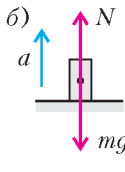
Подведем итог. Примененный здесь метод рассуждений мы будем называть методом «Объединяй и разъединяй». По нашему желанию мы можем считать, что перед нами несколько объектов, а можем считать, что это один объект сложной формы. В некоторых разделах физики, например в теме «Постоянный ток», этот метод применяется в обязательном порядке. В других разделах, в той же «Динамике», его почему-то стесняются вспоминать. А зря.

Теперь вам задание – примените этот метод к решению задач конструктора «Объединяй и разъединяй».

Что такое конструктор? Обычно это набор готовых деталей: колесиков, плит, стержней, винтиков и гаек. Их не надо самим делать. Их надо просто соединить определенным образом. И тогда получатся машинка, самолет или мельница.

В физике конструкторами мы называем такие задания, в которых требуется получить ответы к новым задачам, используя уже известные ответы к стандартным задачам.

В нашем конструкторе мы предлагаем считать данными ответы к таким двум известным задачам:

а)  б) 

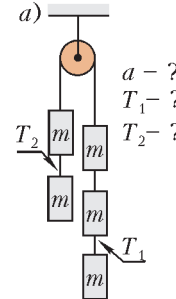
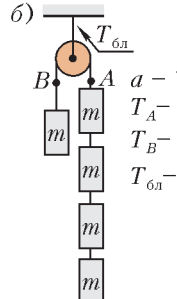
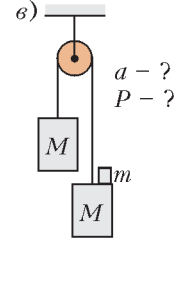
1) Если на нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два тела массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис.5,а), то их ускорение равно

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

2) Если тело массой  $m$  (рис.5,б) движется с ускорением  $a$ , направленным по вертикали, вес тела и всегда равная ему по величине сила реакции опоры (сила натяжения нити) равны

$$P = N = T = m(g \pm a).$$

Предлагаем вам, комбинируя эти формулы, написать ответы к приведенным ниже задачам. Конечно, чтобы сделать это быстро, вам надо уметь жонглировать правилами «объединяй» и «разъединяй». Ускорение свободного падения во всех задачах принять равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

а)  б)  в) 

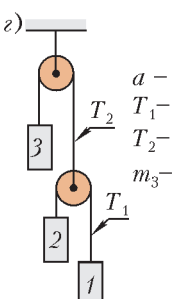
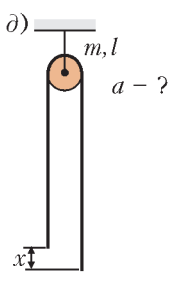
г)  д) 

Рис. 6

**Упражнения**

1. Найдите ускорения тел и натяжения указанных на рисунке 6,а нитей 1 и 2. Масса каждого тела  $m = 1 \text{ кг}$ .
2. Найдите ускорения тел и натяжение нити в точках А и В (рис.6,б). Найдите также натяжение нити, на которой подвешен блок. Масса каждого тела  $m = 1 \text{ кг}$ .
3. На правый груз массой  $M$  ставят перегрузок – груз массой  $m$  (рис.6,в). Найдите ускорение и вес перегрузка после начала движения. Принять  $M = 0,95 \text{ кг}$ ,  $m = 0,1 \text{ кг}$ .
4. В конструкции, изображенной на рисунке 6,г, массы грузов 1 и 2 равны 4 кг и 1 кг соответственно. Когда эти грузы освобождают и они приходят в движение, груз 3 остается неподвижным. Чему равны масса этого груза, ускорения грузов 1 и 2 и натяжения нитей?
5. Через блок перекинут канат массой  $m$  и длиной  $l$ . Канат немного смещают так, что часть, которая находится с правой стороны, становится длиннее на  $x$ , чем часть, которая находится с левой стороны (рис.6,д). После этого канат отпускают. Найдите ускорение, с которым начинает двигаться канат. Считать, что размер блока намного меньше длины каната.

**Этюд 2. Общее и частное**

Есть такие слова: общее и частное. Например, люди – это общее, школьники – это частное, а, к примеру, девятиклассники – это частное частного.

Общее и частное есть и в математике. Среди геометрических фигур, изображенных на рисунке 7, правильный

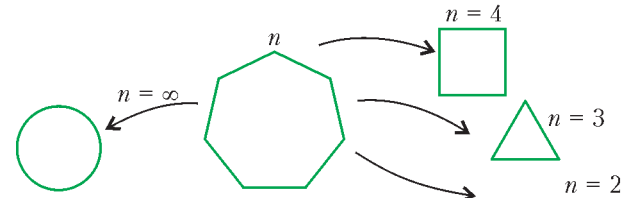


Рис. 7

$n$ -угольник можно считать общим, а квадрат, правильный треугольник, отрезок и круг – частными. Полезно различать общее и частное, потому что формула для общего случая дает ответы и для всех частных случаев. Овладев этими понятиями, вы можете сократить количество формул для запоминания и вместо множества частных формул запомнить лишь одну общую формулу.

Есть общее и частное и в динамике. Так, очень популярны задачи, в которых действующими лицами являются два тела, связанные нитью. Эти тела можно поместить на две наклонные плоскости (рис.8) и спросить, чему равны ускорения тел и сила натяжения нити. А можно расположить эти тела по-другому, например так, как показано на рисунке 9,а-з, и тогда получатся новые задачи. Поверите ли вы, что все эти девять задач – это одна и та же задача? А между тем, это так. Каждый из рисунков 9,а-е – это частный случай рисунка 8, который получается из общего при некоторых конкретных значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Поэтому и ответы к задачам, изображенным на рисунке 9, можно получить из ответа к общему случаю.

Рассмотрим конструктор «Общее и частное». В этом

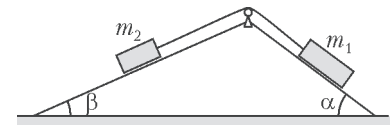


Рис. 8

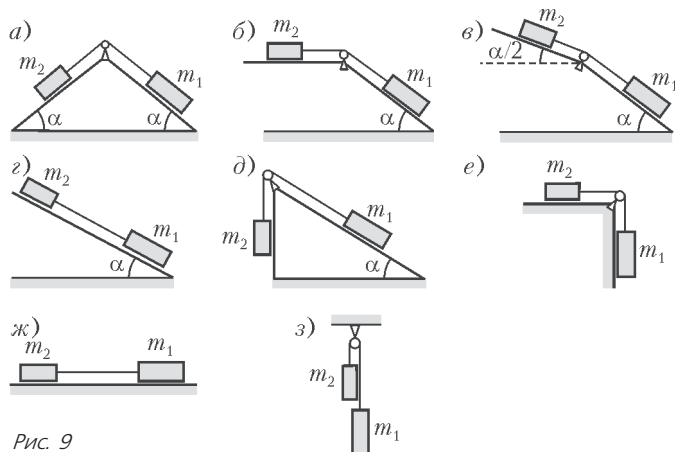


Рис. 9

конструкторе известными считаются ответы к задаче, изображенной на рисунке 8:

1) ускорение двух тел, помещенных на разные грани клина и связанные нерастяжимой нитью, равно

$$a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta}{m_1 + m_2} g ;$$

2) сила натяжения нити равна

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (\sin \alpha + \sin \beta) .$$

**Упражнение 6.** Определите, при каких значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$  из общего рисунка 8 получается каждый из рисунков 9, и напишите, чему равны в каждом случае ускорения тел и сила натяжения нити. Трение не учитывать.

НАША ОБЛОЖКА

**Люминесцентная лампа в микроволновке**

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...И очень просто. Возьмите люминесцентную лампу, изготовленную под патрон E27, аналогичный тому, который используют для обычных ламп накаливания. Погрузите лампу в чашку с водой так, чтобы ее металлические контакты оказались в воде (рис.1), и поместите чашку в микроволновую печь (рис.2).



Рис. 1

Ну а теперь самое интересное. Закройте дверцу микроволновки, нажмите кнопку «Пуск», и через секунду лампа загорится ярким светом (рис.3). Из-за яркого свечения лампы фотокамера выбрала очень короткое время экспозиции, при котором белая дверца микроволнов-



Рис. 2

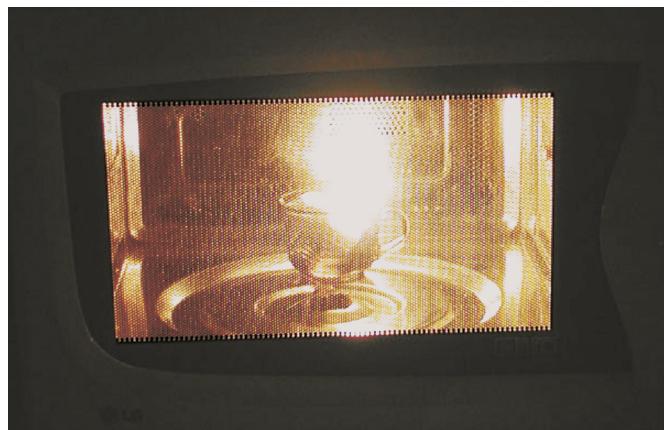


Рис. 3

ки стала черной. Металлическая сетка, предохраняющая от излучения, не позволила получить четкое изображение того, что было внутри микроволновки, однако чашка и контакт лампы видны.

На упаковке лампы написано «Беречь от влаги». Поэтому, боясь, что с лампой что-то случится, я включал микроволновку на секунд пять. Этот опыт я проделал пять раз подряд, потом вытащил лампу из воды, обсушил и вкрутил в патрон обычного осветительного плафона. Похоже, что с лампой ничего не случилось, так как она до сих пор горит. Параметры используемой в эксперименте лампы такие: мощность – 15 Вт, цветовая температура – 2700 К, напряжение – 220 В.

О том, как горят люминесцентные лампы под высоковольтными линиями электропередач (ЛЭП), рассказано в статье «Что может электростатика» в «Кванте» №2 за 2010 год.

К.Богданов

# Заключительный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады прошел с 25 по 30 апреля в городе Майкопе. За последние 15 лет столица Республики Адыгея уже в четвертый раз принимает главное мероприятие года для самых талантливых юных математиков со всей России. Олимпиады в Майкопе всегда прекрасно организованы, проходят в дружеской атмосфере совместной работы оргкомитета, жюри, руководителей команд и участников. Особо благодарим за многолетнюю работу в математическом образовании и организации олимпиад декана факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета Дауда Казбековича Мамий.

Изменения в порядке проведения олимпиады позволили в этом году участвовать в заключительном этапе практически всем сильнейшим олимпиадам страны. При этом каждый регион России имел право выставить хотя бы одного школьника. Выросло и общее количество участников олимпиады по сравнению с предыдущими годами – в ней приняли участие 90 девятиклассников, 64 десятиклассника и 98 одиннадцатиклассников. По традиции Всероссийская олимпиада принимала гостей – команды Болгарии и Китая.

На торжественной церемонии закрытия олимпиады присутствовал Президент Республики Адыгея А.К.Тхакушинов, вручивший награды лучшим участникам. Специальных призов удостоились Михаил Григорьев (Казань), Ярослав Сергиенко (Краснодар) и Василий Мокин (Саратов), показавшие лучшие результаты в параллелях 9, 10 и 11 класса.

По результатам Всероссийской олимпиады из числа кандидатов была сформирована национальная команда России на Международную математическую олимпиаду в составе: Василий Мокин (Саратов), Марсель Матдинов (Оренбург, СУНЦ МГУ), Станислав Ерохин (Санкт-Петербург), Виктор Омеляненко (Белгород), Федор Ивлев (Троицк, СУНЦ МГУ), Кирилл Савенков (Санкт-Петербург).

Опрос определил лучшие, по мнению школьников, задачи олимпиады. Он показал, что участникам в этом году больше понравились трудные задачи: в параллели 9 класса призовые места получили задачи 7, 8 и 4, в параллели 10 класса – 8, 7 и 3, в параллели 11 класса – первое место поделили задачи 7, 8, а в «призерах» оказались задачи 3 и 4.

Публикуем условия задач и список победителей и призеров Заключительного этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Задачи заключительного этапа

9 класс

1. Имеется 24 карандаша четырех цветов – по 6 карандашей каждого цвета. Их раздали 6 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?

*И.Богданов, О.Подлитский*

2. По окружности расставлено 100 попарно различных чисел. Докажите, что можно выбрать 4 подряд стоящих числа таким образом, чтобы сумма двух крайних чисел этой четверки была строго больше суммы средних.

*С.Берлов*

3. Прямые, касающиеся окружности  $\omega$  в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $O$ . Точка  $I$  – центр  $\omega$ . На меньшей дуге  $AB$  окружности  $\omega$  выбрана точка  $C$ , отличная от середины дуги. Прямые  $AC$  и  $OB$  пересекаются в точке  $D$ , а прямые  $BC$  и  $OA$  – в точке  $E$ . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $ACE$ ,  $BCE$  и  $OCE$  лежат на одной прямой.

*А.Полянский*

4. См. задачу M2194 «Задачника «Кванта».

5. Различные действительные числа  $a$  и  $b$  таковы, что уравнение

$$(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$$

не имеет корней. Докажите, что число  $20(b - a)$  не является целым.

*П.Козлов*

6. У каждого из 1000 гномов есть колпак, синий снаружи и красный внутри (или наоборот). Если на гноме надет красный колпак, то он может только лгать, а если синий – только говорить правду. На протяжении одного дня каждый гном сказал каждому «На тебе красный колпак!» (при этом некоторые гномы в течение дня выворачивали свой колпак наизнанку). Найдите наименьшее возможное количество выворачиваний.

*И.Богданов*

7. Назовем натуральное число  $n$  *неудачным*, если его нельзя представить в виде  $n = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}$  при натуральных  $x, y > 1$ . Конечно или бесконечно количество неудачных чисел?

*В.Сендеров*

8. В остроугольном треугольнике  $ABC$  медиана  $AM$  длиннее стороны  $AB$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  можно разрезать на три части, из которых складывается ромб.

*С.Волчѐнков*

10 класс

1. Имеется 40 карандашей четырех цветов – по 10 карандашей каждого цвета. Их раздали 10 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?

*И.Богданов, О.Подлитский*

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Через центр  $O$  окружности, описанной около неравнобедренного остроугольного треугольника  $ABC$  проведены прямые, перпендикулярные сторонам  $AB$  и  $AC$ . Эти прямые пересекают высоту  $AD$  треугольника  $ABC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Точка  $M$  – середина стороны  $BC$ , а  $S$  – центр окружности, описанной около треугольника  $OPQ$ . Докажите, что  $\angle BAS = \angle CAM$ .

*Д.Прокопенко*

4. См. задачу М 2193 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. См. задачу М2192 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу М2195 «Задачника «Кванта».

8. В стране некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом из любого города можно долететь в любой другой (возможно, с пересадками). Известно, что если выбрать любой замкнутый маршрут из нечетного числа рейсов и закрыть все эти рейсы, то уже не из любого города можно будет добраться в любой другой. Докажите, что все города можно распределить по 4 республикам так, чтобы любой рейс соединял города из разных республик. (Некоторые республики могут не содержать городов.)

*В.Дольников*

11 класс

1. Существуют ли такие ненулевые действительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ , что

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \dots \left(a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right) = \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right) \dots \left(a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right)?$$

*Н.Агаханов, И.Богданов*

2. В клетчатой таблице  $n \times n$  ( $n \geq 4$ ) поставлены  $n$  знаков «+» в клетках одной диагонали и знаки «-» во всех остальных клетках. Разрешается в некоторой строке или в некотором столбце поменять все знаки на противоположные. Докажите, что после любого количества таких операций в таблице останется не менее  $n$  плюсов.

*Р.Карасев*

3. См. задачу М2198, а) «Задачника «Кванта».

4. Дано натуральное число  $n \geq 3$ . При каком наименьшем  $k$  верно следующее утверждение: для любых  $n$  точек  $A_i = (x_i, y_i)$  на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и любых вещественных чисел  $c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) существует такой многочлен  $P(x, y)$ , степень которого не больше  $k$ , что  $P(x_i, y_i) = c_i$  при всех  $i = 1, \dots, n$ .

*Ф.Петров*

5. См. задачу М2191 «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М2196 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу М2197 «Задачника «Кванта».

8. В школе-интернате преподается 9 предметов и учатся 512 детей, расселенных в 256 двухместных номерах (детей, живущих в одном номере, назовем *соседями*). Известно, что у любых двух детей наборы предметов, которые им интересны, различны (в частности, ровно одному ребенку не интересно ничего). Докажите, что всех детей можно построить по кругу так, чтобы любые два соседа стояли рядом, а для любых двух несоседей, стоящих рядом, одному из них интересны все предметы, интересные другому, и еще ровно один предмет.

*Д.Фон-Дер-Флаасс*

## ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

### Диплом победителя

по 9 классам получили

*Григорьев Михаил* – Казань, лицей 131,

*Кузин Михаил* – Москва, школа 25,

*Шабанов Лев* – Ангарск, школа 10 с углубленным изучением отдельных предметов,

*Гордеев Алексей* – Пермь, школа 9 им. А.С. Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,

*Игошина Виктория* – Ижевск, ЭМЛ 29;

по 10 классам –

*Сергиенко Ярослав* – Краснодар, лицей НОУ ВПО Институт современных технологий и экономики,

*Пахарев Алексей* – Москва, СУНЦ МГУ,

*Егоров Дмитрий* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Миронов Михаил* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,

*Макаров Даниил* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,

*Малысова Виктория* – Ростов-на-Дону, экономический лицей 14,

*Циглер Александр* – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики,

*Королев Николай* – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при Казанском государственном университете;

по 11 классам –

*Мокин Василий* – Саратов, Лицей прикладных наук,

*Матдинов Марсель* – Москва, СУНЦ МГУ,

*Омельяненко Виктор* – Белгород, лицей 38,

*Ерохин Станислав* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Балицкий Алексей* – Железногорск, школа 11 с углубленным изучением отдельных предметов,

*Ивлев Федор* – Москва, СУНЦ МГУ,

*Савенков Кирилл* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

### Диплом призера

по 9 классам получили

*Рухович Алексей* – Москва, школа «Интеллектуал»,

*Крачун Дмитрий* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Турбин Максим* – Челябинск, лицей 31,

*Ахмедов Максим* – Москва, школа 25,

*Понфиленко Анастасия* – Москва, гимназия 1514,

*Рябцева Мария* – Ульяновск, гимназия 79,

*Калмынин Александр* – Иркутск, лицей-интернат 1,

*Зайков Александр* – Краснодар, гимназия 36,

*Андреева Анна* – Долгопрудный, ФМЛ 5,

*Крохмаль Николай* – Белгород, лицей 38,

*Лахтанов Иван* – Москва, школа 25,

*Закиров Артем* – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,

*Скутин Александр* – Москва, лицей «Вторая школа»,

*Гальковский Егор* – Санкт-Петербург, лицей 533,  
*Деев Родион* – Саратов, ФТЛ 1,  
*Коновалов Андрей* – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,  
*Южаков Александр* – Курган, гимназия 31,  
*Новиков Владислав* – Уфа, лицей 60,  
*Косинов Никита* – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,  
*Кравцов Дмитрий* – Белгород, лицей 38,  
*Целищев Антон* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Жевнерчук Антон* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Прудников Андрей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Френклах Давид* – Долгопрудный, ФМЛ 5,  
*Кибкало Владислав* – Саров, гимназия 2,  
*Симонов Кирилл* – Пермь, школа 9 им. А.С. Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,  
*Салихов Аяз* – Казань, лицей 131,  
*Измайлов Рамиль* – Казань, лицей-интернат 7,  
*Бусыгин Игорь* – Ижевск, ЭМЛ 29,  
*Осипов Павел* – Томск, школа 54,  
*Иванов Даниил* – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,  
*Кочнев Роман* – Снежинск, гимназия 127,  
*Лагутина Ксения* – Ярославль, гимназия 2;

**по 10 классам –**

*Цыбышев Алексей* – Самара, гимназия 1,  
*Гольцова Надежда* – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики,  
*Ионов Андрей* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Мукосеева Екатерина* – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,  
*Бесман Дмитрий* – Курган, школа 48,  
*Янушковский Владимир* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Шкляев Михаил* – Королев, лицей научно-инженерного профиля,  
*Решетников Иван* – Долгопрудный, ФМЛ 5,  
*Бурова Ольга* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Гонин Роман* – Московская обл., Раменское, гимназия,  
*Гаража Александра* – Москва, школа «Интеллектуал»,  
*Осипов Матвей* – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,  
*Балобанов Арсений* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Заводов Алексей* – Долгопрудный, ФМЛ 5,  
*Чикин Владимир* – Нижний Новгород, лицей 36,  
*Калашиников Иван* – Пермь, школа 146 с углубленным изучением математики, физики и информатики,  
*Киселев Евгений* – Ярославль, школа 58 с углубленным изучением предметов естественно-математического цикла,

*Юркин Виктор* – Курган, Курганский областной лицей-интернат для одаренных детей,  
*Просанов Роман* – Новосибирск, СУНЦ НГУ,  
*Хомутов Никита* – Краснодар, лицей НОУ ВПО Институт современных технологий и экономики,  
*Титов Дмитрий* – Усть-Лабинск, школа 2;

**по 11 классам –**

*Бернштейн Антон* – Новосибирск, гимназия 1,  
*Калиниченко Иван* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Томас Павел* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Кушир Андрей* – Иркутск, лицей 2,  
*Куприянов Александр* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики,  
*Ястребов Игорь* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Климовицкий Иосиф* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Бердников Александр* – Новосибирск, гимназия 1,  
*Бондаренко Михаил* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Исаак Евгений* – Курган, школа 38,  
*Устинов Никита* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Тыщук Константин* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Бояров Игорь* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Козачинский Александр* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Беляков Сергей* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Доледенко Алексей* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Ефимов Алексей* – Уфа, школа 68,  
*Сапаркин Лев* – Казань, лицей-интернат 2,  
*Ладан Екатерина* – Набережные Челны, гимназия 26,  
*Пологова Анна* – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,  
*Ламтюгин Алексей* – Ульяновск, школа 21,  
*Кондаков Иван* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики,  
*Горбань Степан* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Лысенко Николай* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Смыкалов Владимир* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Малых Софья* – Киров, КФМЛ,  
*Машиников Олег* – Курган, школа 42,  
*Холодняк Алексей* – Майкоп, гимназия 5,  
*Кононов Яков* – Улан-Удэ, Российская гимназия 59,  
*Харациди Олег* – Набережные Челны, гимназия 26,  
*Попов Максим* – Нижнекамск, лицей-интернат 24,  
*Воронов Сергей* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики,  
*Староверов Владислав* – Москва, СУНЦ МГУ.

Публикацию подготовили *Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин*

## ИНФОРМАЦИЯ

### Вниманию наших читателей!

Подписка на журнал «Квант» на I полугодие 2011 года принимается во всех почтовых отделениях по ДОПОЛНЕНИЮ к подписному каталогу «Роспечать» (Дополнение

вложено в этот каталог). Наш подписной индекс 70465.

Подписку также можно оформить по каталогу «Пресса России» по подписному индексу 88275.

# Заключительный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

В этом году заключительный этап олимпиады по физике проходил в городе Белгороде на площадке Белгородского государственного технологического университета им. В.Г.Шухова. Участники олимпиады были приятно удивлены чистотой в городе, европейской ухоженностью университета.

Всего в олимпиаде приняли участие 239 школьников (из 260 прошедших по рейтингу), включая призеров и победителей олимпиады прошлого года.

Задачи для теоретического и экспериментального туров разрабатывались методической комиссией по физике при Центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников. Для проверки работ участников олимпиады было сформировано жюри из представителей Центральной методической комиссии по физике (МФТИ, МГУ, НГУ, МИРЭА, ЦАГИ, БГТУ) и студентов Московского физико-технического института – призеров международных физических олимпиад прошлых лет.

По результатам олимпиады почти 45% участников были награждены дипломами призеров и победителей. По параллелям картина выглядит следующим образом:

Класс	Число участников	Диплом победителя	Диплом призера	Всего
9	72	4	26	30
10	77	5	30	35
11	90	8	33	41
Всего	239	17	89	106

Из числа призеров олимпиады были сформированы сборные команды кандидатов на международные физические олимпиады (МФО) в 2010 и 2011 годах. Так, на последний летний сбор перед МФО этого года были приглашены 9 одиннадцатиклассников:

N	Фамилия	Имя	Отчество	Регион
1	Алексеев	Алексей	Алексеевич	Бийск, Алтайский край
2	Анашкин	Виктор	Алексеевич	Бийск, Алтайский край
3	Антоненко	Даниил	Сергеевич	Ростов-на-Дону
4	Горностаев	Дмитрий	Александрович	Республика Мордовия
5	Карелина	Любовь	Николаевна	Екатеринбург
6	Коновалов	Александр	Александрович	Долгопрудный, Московская область
7	Кононов	Яков	Александрович	Республика Бурятия
8	Стройнов	Евгений	Евгеньевич	Москва
9	Тарасов	Артем	Леонидович	Киров

Эти ребята уже были призерами Всероссийской олимпиады 2009 года, поработали на летних и зимних сборах. Пятеро из них поехали на МФО, а четверо – на Международную олимпиаду «Туймаада» в Якутию. Группа из 23 десятикласс-



Награждение победителей XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

ников начинает подготовку к МФО 2011 года, которая пройдет в Таиланде. И, наконец, группа девяти- и десятиклассников (24 человека) летом приступила к подготовке к Международной естественно-научной олимпиаде юниоров, которая пройдет в декабре этого года в Нигерии.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список победителей и призеров олимпиады.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

### Задача 1. Плотность нефти

В сильно загрязненном водоеме толщина слоя нефти на поверхности воды составляет  $d = 1,0$  см. На поверхность водоема пустили плавать цилиндрический стакан массой  $m = 4,0$  г с площадью дна  $S = 25$  см<sup>2</sup>. Стакан был сначала пустым, а его дно находилось выше середины уровня нефти. Затем в стакан долили нефти так, чтобы ее уровни внутри стакана и снаружи сравнялись. В обоих случаях дно находилось на одном и том же расстоянии  $a$  от уровня воды (рис.1). Определите плотность нефти  $\rho_1$ , зная, что плотность воды  $\rho_0 = 1,0$  г/см<sup>3</sup>.

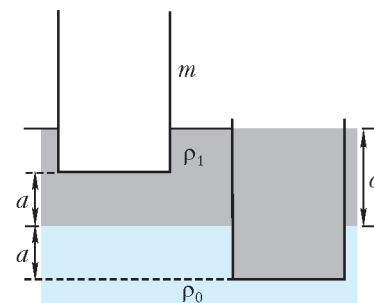


Рис. 1

И.Ерофеев

### Задача 2. Маневры кораблей

Два корабля движутся с постоянными и одинаковыми по модулю скоростями  $v_1 = v_2 = v$ . В некоторый момент рас-

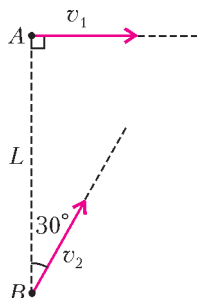


Рис. 2

стояние между ними оказалось равным  $L$ , а их взаимное расположение – таким, как показано на рисунке 2.

1) Определите минимальное расстояние  $l$  между кораблями при их последующем движении.

2) Найдите время  $\tau$ , через которое корабли окажутся на минимальном расстоянии друг от друга.

3) В момент, когда корабль  $B$  пересекает линию движения корабля  $A$ , от борта корабля  $A$  отправляется катер, который должен доставить на корабль  $B$  пакет с важным сообщением. Определите, через какое минимальное время  $\Delta t$  после отправки катера пакет будет доставлен на борт корабля  $B$ , если скорость  $u$  катера также равна  $v$ .

С. Козел

### Задача 3. Плавление льда

В большой плоской льдине, имеющей температуру  $0^\circ\text{C}$ , сделали лунку объемом  $V_0 = 1000 \text{ см}^3$  и прикрыли ее пенопластовой (теплоизолирующей) крышкой с небольшим отверстием (рис. 3).

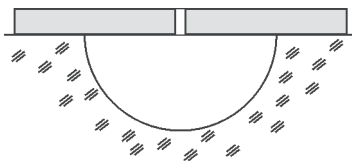


Рис. 3

3). Какую максимальную массу  $m$  воды, имеющей температуру  $100^\circ\text{C}$ , можно постепенно влить через отверстие в лунку? Известно, что удельная теплоемкость воды  $c_0 = 4,19 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , плотность воды  $\rho_0 = 1,00 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 0,90 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , а удельная теплота плавления льда  $\lambda = 334 \text{ кДж}/\text{кг}$ .

Фольклор

### Задача 4. Электроплитка

Электроплитка имеет две спирали (два нагревательных элемента), которые можно включать в сеть постоянного напряжения либо по отдельности, либо соединяя их последовательно или параллельно. Будем считать, что сопротивления спиралей не зависят от температуры. Оказалось, что если включить в сеть только первую спираль, то электроплитка нагревается до температуры  $t_1 = 180^\circ\text{C}$ , а если включить только вторую спираль, то плитка нагревается до температуры  $t_2 = 220^\circ\text{C}$ . До какой температуры  $t_3$  нагреется плитка при:

- 1) последовательном включении спиралей;
- 2) параллельном включении спиралей?

**Указание.** Поток тепла от плитки во внешнюю среду пропорционален разности температур между плиткой и воздухом в комнате. Температуру воздуха считать постоянной и равной  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ .

С. Козел

### Задача 5. Электрический мостик

См. задачу Ф2186 «Задачника «Кванта».

10 класс

### Задача 1. Скольжение груза по доске

На длинном гладком горизонтальном столе лежит доска массой  $m_2$  и длиной  $L$ , на левом конце которой находится

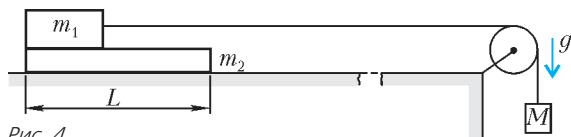


Рис. 4

грузом массой  $m_1$  (рис. 4). Коэффициент трения между грузом и доской  $\mu$ , трение между доской и столом отсутствует. Груз массой  $m_1$  связан с грузом массой  $M$  длинной невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок без трения в оси. Система начинает двигаться из состояния покоя.

1) При каких значениях коэффициента трения  $\mu$  груз на доске и доска будут двигаться как единое целое (без проскальзывания)?

2) Найдите минимальное значение коэффициента трения  $\mu_{\text{min}}$ , при котором возможно движение без проскальзывания.

3) Пусть  $\mu = \mu_{\text{min}}/2$ . В этом случае груз на доске и доска будут двигаться с разными ускорениями. Через какое время  $t$  после начала движения груз соскользнет с доски?

Считайте, что  $m_1 = M = 1 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 2 \text{ кг}$ ,  $L = 1 \text{ м}$ . Известно, что длина груза много меньше  $L$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ .

С. Козел

### Задача 2. Диссоциация

При нормальных условиях кислород состоит из двухатомных молекул  $\text{O}_2$ . При повышении температуры часть молекул может диссоциировать, в результате чего из каждой молекулы  $\text{O}_2$  образуются два атома  $\text{O}$ . На рисунке 5 показаны два идентичных циклических процесса

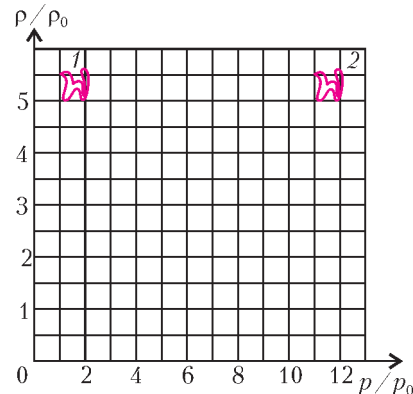


Рис. 5

циклических процесса 1 и 2 в координатах  $(p, \rho)$ , где  $\rho$  – плотность газа,  $p$  – давление. По осям отложены безразмерные величины  $p/p_0$  и  $\rho/\rho_0$ , где  $p_0$  и  $\rho_0$  – некоторые масштабные коэффициенты. При проведении первого эксперимента рабочим веществом служил молекулярный кислород (низкие температуры). Второй эксперимент проводился при значительно более высоких температурах, так что часть кислорода находилась в молекулярном, а часть – в атомарном состоянии и степень диссоциации не изменялась в течение эксперимента. Масса газа в обоих экспериментах была одной и той же. Известно, что отношение максимальных температур в этих экспериментах равно  $k_{\text{max}} = T_{\text{max}2}/T_{\text{max}1} = 5$ .

1) Определите степень диссоциации  $\alpha$  (долю диссоциированных молекул) молекул кислорода во втором эксперименте.

2) Определите отношение  $k_{\text{min}}$  минимальных температур в этих экспериментах.

А. Малеев

### Задача 3. Шайба на наклонной плоскости

Небольшую шайбу толкнули вверх вдоль наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  с начальной скоростью  $v_0$ .

1) Через какое время  $t_0$  шайба вернется в исходную точку при отсутствии трения?

2) При каких значениях коэффициента трения  $\mu$  шайба возвратится назад?

3) Определите время  $t$  возврата шайбы в исходную точку при наличии трения.

4) При каком значении коэффициента трения  $\mu$  время возврата  $t$  будет равно  $t_0$ ?

В. Паверман



**Задача 4. Варистор**

В некоторых случаях для предохранения электроприборов от больших изменений входного напряжения применяются нелинейные полупроводниковые элементы – варисторы, включаемые параллельно прибору, роль которого на рисунке 6 играет нагрузочное сопротивление  $R_H$ . Здесь  $R_H = 10 \text{ Ом}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$  – балластное сопротивление,  $B$  –

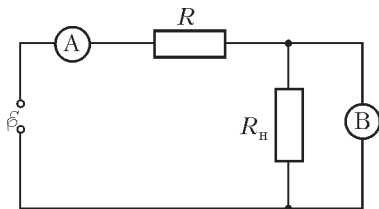


Рис. 6

варистор, вольт-амперная характеристика которого изображена на рисунке 7,  $I$  – показания амперметра  $A$ ,  $\varepsilon$  – входное напряжение. В номинальном режиме амперметр показывает силу тока  $I = I_0 = 1,0 \text{ А}$ .

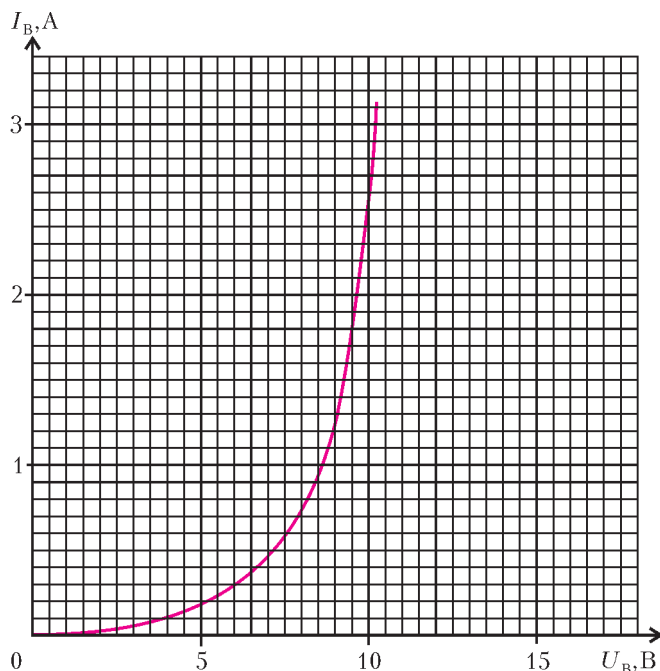


Рис. 7

1) Определите входное напряжение  $\varepsilon_1$  в номинальном режиме, а также напряжение  $U_{B1}$  на варисторе и силу тока  $I_{B1}$ , текущего через него.

2) Пусть входное напряжение возросло в 2 раза и стало равным  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ . Определите, на сколько увеличилось напряжение на нагрузке и на сколько изменилась сила тока, протекающего через варистор.

Д.Сметнев

**Задача 5. Цепь с двумя конденсаторами**

1) В электрической цепи (рис.8), состоящей из идеального источника с ЭДС  $\varepsilon$ , двух конденсаторов с емкостями  $2C$  и  $C$  и резистора с некоторым сопротивлением, замыкают ключ  $K_1$ . До каких напряжений зарядятся конденсаторы?

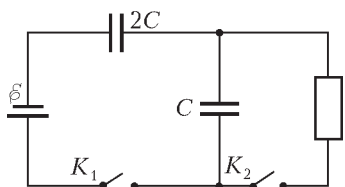


Рис. 8

2) После того как конден-

саторы полностью зарядились, замыкают ключ  $K_2$  и размыкают его тогда, когда сила тока через источник уменьшается в 2 раза по сравнению с силой тока через него сразу после замыкания ключа  $K_2$ . Найдите количество теплоты  $Q$ , выделившееся в цепи за время, прошедшее с момента замыкания ключа  $K_2$  до момента его размыкания.

А.Шеронов

11 класс

**Задача 1. Цепочка на сфере**

См. задачу Ф2184 «Задачника «Кванта».

**Задача 2. Движение без проскальзывания**

На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится длинная доска массой  $m_1$ , на правый край которой помещен брусок массой  $m_2$  (рис.9). Брусок соединен со стенкой легкой нерастянутой пружины жесткостью  $k$ . К доске прикреплен груз массой  $M$  с помощью легкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок. В начальный момент система покоится. Между доской и бруском существует сухое трение, коэффициент трения между доской и бруском  $\mu$ . Какой путь  $L$  преодолеет брусок к тому моменту времени, когда между ним и доской начнется проскальзывание? Исследуйте, как зависит результат от  $\mu$ . Найдите время  $t$  движения бруска, за которое он преодолеет расстояние  $L$ .

Д.Александров

**Задача 3. Тепловая машина**

У тепловой машины, работающей по циклу Карно, температура нагревателя  $T_1 = 800 \text{ К}$ , а температура  $T$  холодильника зависит от полезной мощности  $P$  машины. Холодильник представляет собой массивное теплоизолированное от окружающей среды тело, которое посредством теплопроводности передает холодному резервуару с температурой  $T_2 = 300 \text{ К}$  всю тепловую энергию  $Q_2$ , полученную за время  $\Delta t$  работы машины (рис.10). Теплопроводность осуществляется по закону  $Q_2 = \alpha(T - T_2)\Delta t$ , где  $\alpha = 1,0 \text{ кВт/К}$ .

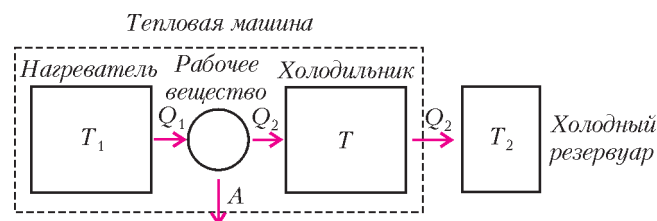


Рис. 10

1) Выразите мощность  $P$  тепловой машины через температуры  $T_1$ ,  $T$  и  $T_2$ .

2) Вычислите температуру  $T_m$  холодильника, при которой мощность машины максимальна.

3) Определите эту максимальную мощность  $P_{\max}$ .

4) Найдите КПД  $\eta$  тепловой машины при работе с максимальной мощностью.

С.Козел

**Задача 4. Движение заряженных частиц**

См. задачу 2188 «Задачника «Кванта».

**Задача 5. Униполярный индуктор**

См. задачу Ф2195 «Задачника «Кванта».

## ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

### *Диплом победителя*

#### **по 9 классам** получили

Фещенко Илья – Москва,  
 Рухович Алексей – Москва,  
 Бушмин Иван – Московская область,  
 Гинзбург Лев – Хабаровский край;

#### **по 10 классам** –

Заночкин Андрей – Нижегородская область,  
 Сопенко Никита – Тамбовская область,  
 Паринов Данила – Москва,  
 Чурилов Антон – Тульская область,  
 Арзамасский Лев – Калининградская область;

#### **по 11 классам** –

Горностаев Дмитрий – Республика Мордовия,  
 Кононов Яков – Республика Бурятия,  
 Стройнов Евгений – Москва,  
 Тарасов Артем – Кировская область,  
 Алексеев Алексей – Алтайский край,  
 Карелина Любовь – Свердловская область,  
 Шустикова Анна – Пензенская область,  
 Анаскин Виктор – Алтайский край.

### *Диплом призера*

#### **по 9 классам** получили

Гальковский Егор – Санкт-Петербург,  
 Ивашковский Иван – Москва,  
 Ширкин Михаил – Московская область,  
 Сафонова Оксана – Оренбургская область,  
 Слободсков Игорь – Московская область,  
 Козлов Даниил – Иркутская область,  
 Макаров Эдгар – Нижегородская область,  
 Васильева Александра – Москва,  
 Кибкало Владислав – Нижегородская область,  
 Логинов Николай – Нижегородская область,  
 Синяков Лев – Москва,  
 Лялин Феликс – Ханты-Мансийский автономный округ,  
 Ширококов Михаил – Архангельская область,  
 Косинов Никита – Ульяновская область,  
 Красник Павел – Алтайский край,  
 Оголь Артем – Тамбовская область,  
 Седов Александр – Ульяновская область,  
 Волчкова Анна – Ямало-Ненецкий автономный округ,  
 Сухов Николай – Москва,  
 Варламов Евгений – Республика Коми,  
 Красавина Татьяна – Вологодская область,  
 Дедович Сергей – Московская область,  
 Евсеев Олег – Москва,  
 Жегин Константин – Москва,  
 Силин Игорь – Пермский край,  
 Шишкин Николай – Новгородская область;

#### **по 10 классам** –

Головешкин Александр – Москва,  
 Ноян Алексей – Москва,  
 Шель Егор – Москва,  
 Шуранов Дмитрий – Республика Башкортостан,  
 Акинъчиков Алексей – Новгородская область,  
 Шкляев Михаил – Московская область,  
 Земляков Олег – Республика Чувашия,  
 Тимохин Иван – Москва,  
 Асташкин Роман – Московская область,  
 Ионов Андрей – Москва,

Янушковский Владимир – Москва,  
 Цыбров Федор – Республика Коми,  
 Декань Валентин – Тверская область,  
 Лучников Илья – Кировская область,  
 Прокофьев Вадим – Рязанская область,  
 Семенов Владимир – Вологодская область,  
 Безменова Александра – Москва,  
 Гонин Роман – Московская область,  
 Крайнов Павел – Костромская область,  
 Никитенков Павел – Смоленская область,  
 Циглер Александр – Челябинская область,  
 Базылик Сергей – Санкт-Петербург,  
 Бегун Александр – Приморский край,  
 Голенко Дмитрий – Московская область,  
 Храмов Игорь – Ульяновская область,  
 Билинский Юрий – Республика Башкортостан,  
 Гамов Артемий – Нижегородская область,  
 Куликов Сергей – Пензенская область,  
 Макаров Даниил – Москва,  
 Ростов Антон – Нижегородская область;

#### **по 11 классам** –

Фролов Федор – Вологодская область,  
 Антоненко Даниил – Ростовская область,  
 Курочкин Никита – Республика Чувашия,  
 Попов Федор – Пермский край,  
 Комендантян Андрей – Самарская область,  
 Артамонов Дмитрий – Нижегородская область,  
 Коновалов Александр – Московская область,  
 Казеев Никита – Санкт-Петербург,  
 Ковалев Кирилл – Ярославская область,  
 Давыдов Иван – Санкт-Петербург,  
 Перевошиков Денис – Кировская область,  
 Лавров Петр – Пермский край,  
 Офенгейм Дмитрий – Санкт-Петербург,  
 Светогоров Александр – Калужская область,  
 Савадян Артем – Москва,  
 Гаврилюк Александр – Пермский край,  
 Бердников Александр – Новосибирская область,  
 Старичков Никита – Калужская область,  
 Шуравин Никита – Свердловская область,  
 Гусач Анастасия – Ростовская область,  
 Ким Александр – Республика Саха (Якутия),  
 Раков Артем – Москва,  
 Смирнов Николай – Новосибирская область,  
 Садков Виктор – Саратовская область,  
 Разумов Дмитрий – Нижегородская область,  
 Костин Петр – Белгородская область,  
 Кукушкин Павел – Московская область,  
 Ефимов Вячеслав – Красноярский край,  
 Николаев Егор – Республика Марий Эл,  
 Усов Роман – Москва,  
 Белянчиков Михаил – Кемеровская область,  
 Новиков Иван – Новосибирская область,  
 Сергеев Александр – Москва.

*Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин*

# XIV Международный турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» вновь собрал одаренных школьников и талантливых студентов на свой турнир «Компьютерная физика». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальной науке и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые.

Традиционно, турнир проводится в два тура – заочный и очный. Заочный тур XIV Турнира начался в октябре 2009 года рассылкой задания заочного тура «Планетная система» по заявкам в лицеи, школы и гимназии. (Задание было опубликовано в журнале «Квант» № 4 за 2009 год, что значительно увеличило число команд-участниц турнира.) Шесть лучших команд были приглашены на финал – очный тур соревнований.

Очный тур XIV Турнира был проведен с 31 января по 7 февраля 2010 года в городе Протвино на базе Института физики высоких энергий при участии и поддержке МГУ им. М.В.Ломоносова, фонда «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», журналов «Квант» и «Физика в школе» и Издательского дома «Первое сентября». Оргкомитет турнира выражает благодарность всем названным организациям за помощь в проведении турнира и поддержку одаренных школьников и талантливых студентов. Участники очного тура соревновались в решении задачи «Шайба на полусфере».

По итогам двух туров абсолютным победителем XIV Турнира стала команда лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ), получившая переходящий приз «Хрустальный глобус», диплом I степени и памятные знаки. Дипломы II степени в этом году получили ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана и Самарский международный аэрокосмический лицей, а диплом III степени – команда из Казахстана. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

В рамках турнира был проведен также конкурс компьютерного творчества, включающий три направления: «Виртуальная физическая лаборатория» (разработанная компани-

ей «Физикон»), конкурс научных проектов и командная интеллектуальная компьютерная игра.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XV Турнире «Компьютерная физика» в январе-феврале 2011 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «Глюон»

Телефон (495)517-8014, факс: (495) 396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: www.gluon.ru

Ниже приводится задание заочного тура следующего турнира.

## Задание заочного тура XV Турнира

### «Комбинационное рассеяние»

Нелинейные оптические явления возникают в среде в результате возбуждения колебаний на частотах, не совпадающих с частотой падающего электромагнитного излучения. Первым было открыто явление комбинационного рассеяния в 1928 году советскими физиками Г.С.Ландсбергом и Л.И.Мандельштамом при исследовании рассеяния света в кристаллах и индийским физиком Ч.Раманом при исследовании рассеяния света в жидкостях. Это явление заключается в том, что при облучении среды светом с частотой  $\omega$  в рассеянном свете возникает излучение на частоте  $\Omega = \omega \pm \omega_0$ , где  $\omega_0$  – собственная частота колебаний в среде. В случае среды типа разреженного газа собственная частота колебаний – это частота колебаний электронов в атомах или молекулах. Для разности частот говорят о стоксовом комбинационном рассеянии, а для суммы частот – об антистоксовом комбинационном рассеянии.

Спонтанное комбинационное рассеяние (СКР) наблюдается при взаимодействии излучения с атомами и молекулами, совершающими тепловые колебания. Создание мощных лазерных источников излучения привело к открытию в 1962 году эффекта вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР), которое возникает вследствие раскачки атомных колебаний воздействующим на среду сильным электромагнитным излучением. Соответственно, сигнал вынужденного рассеяния оказывается существенно сильнее сигнала спонтанного рассеяния.

Комбинационное рассеяние представляет собой современный метод изучения структуры и строения среды. Наиболее эффективным является метод когерентного антистоксового рассеяния света (КАРС). Идея этого метода заключается в принудительном возбуждении собственных колебаний среды под действием двух пучков световых волн (волн накачки) с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  такими, что их разность равна собственной частоте колебаний в среде:  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_0$ . В этом случае происходит резонансное раскачивание колебаний атомов в молекулах. Исследуется сигнал комбинационного рассеяния, возникающий при прохождении через среду пробной волны с частотой  $\omega_3$ . Обычно в качестве пробной волны используется одна из волн накачки, например с частотой  $\omega_1$ . Излучение в этом случае можно наблюдать на частоте



$\omega = \omega_3 + (\omega_1 - \omega_2) = 2\omega_1 - \omega_2$ . Спектр КАРС может быть получен плавной перестройкой одной из частот накачки, как правило  $\omega_2$ .

Для описания процессов комбинационного рассеяния света предлагается классическая модель нелинейной среды, состоящей из ансамбля атомов – ангармонических осцилляторов. В рамках этой модели потенциал атомного электрона равен

$$U = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \alpha|x|^3,$$

где  $\omega_0$  – собственная частота колебаний среды, а второй член дает малую нелинейную поправку к гармоническому потенциалу. При моделировании колебаний электрона необходимо учесть силу, действующую на электрон со стороны внешнего электромагнитного поля, а также силу трения, описывающую процесс релаксации в среде и приводящую к затуханию колебаний в отсутствие внешнего воздействия. Эту силу можно записать в виде  $F_{\text{тр}} = -\gamma m v$ , где  $m$  и  $v$  – масса и средняя скорость теплового движения электрона. В отсутствие внешнего воздействия атомный электрон совершает тепловые колебания на частоте  $\omega_0$ . Амплитуда этих колебаний определяется температурой среды. Для описания таких колебаний в модель необходимо ввести дополнительную вынуждающую силу  $f_0 \cos \omega_0 t$ , амплитуда которой в конечном счете определяется температурой среды. Фактически в нашей модели предполагается, что амплитуда тепловых колебаний определяется балансом работ вынуждающей силы и силы трения за период колебаний:  $f_0 = \gamma m v$ . Средняя скорость теплового движения равна

$$v_T = \sqrt{\frac{\pi h \omega_0}{m \left( e^{2\pi k T} - 1 \right)}},$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/моль – постоянная Больцмана.

При прохождении через среду электромагнитной волны с интенсивностью  $I_0$  уравнение движения электрона имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + m\omega_0 x \pm \alpha x^2 = f_0 \cos \omega_0 t + eE_0 \cos \omega t,$$

где  $E_0 = \sqrt{2I_0 \frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. В уравнении член  $\alpha x^2$  имеет знак «+» при  $x \geq 0$  и знак «-» при  $x < 0$ . Под действием падающего излучения электрон совершает вынужденные колебания и переизлучает поглощенную от поля энергию на частоте вынужденных колебаний. В нелинейной среде вынужденные колебания возбуждаются не только на частоте вынуждающей силы, но также и на наборе частот, определяемых нелинейными свойствами среды. Спектральное значение энергии (энергии, приходящейся на единичный диапазон частот) рассеянного света на частоте  $\omega$  связано со спектральным значением амплитуды колебаний  $x_\omega$  (см. математическое приложение 2) на данной частоте соотношением

$$P_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} \omega^4 x_\omega^2,$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $e$  – заряд электрона.

### Задание

1. Исследуйте зависимость спектрального значения энергии рассеянного излучения в спектроскопии КР от частоты и интенсивности падающего электромагнитного излучения  $P_\omega(\omega, I_0)$  в диапазоне  $\omega = 2 \cdot 10^{15} - 10^{16} \text{ с}^{-1}$ , предположив, что у вас есть мощный источник лазерного излучения с интенсивностью  $I_0 = 10^{12} - 10^{18} \text{ Вт/м}^2$ . Повторите открытие вынужденного комбинационного рассеяния, определив значение  $I_0$  (порог), при котором возникает ВКР при комнатной температуре 300 К.

2. Исследуйте зависимость спектрального значения энергии рассеянного излучения  $P_\omega(T, I_0)$  в спектроскопии КР от температуры среды, изменяющейся от 30 до 3000 К при  $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  и  $I_0 = 10^{12} - 10^{18} \text{ Вт/м}^2$ .

3. Определите зависимость спектрального значения энергии рассеянного излучения  $P_\omega(I_{01}, I_{02})$  в КАРС спектроскопии от равных интенсивностей волн накачки в диапазоне  $I_{01,02} = 10^{12} - 10^{18} \text{ Вт/м}^2$  при комнатной температуре 300 К, если их частоты равны  $\omega_1 = 3,5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_2 = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Сравните КАРС с СКР и ВКР.

Для моделирования предлагаются значения  $\gamma = 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha = 3 \cdot 10^{11} \text{ кг/(м} \cdot \text{с}^2)$ ,  $\omega_0 = 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

### Математические приложения

1. Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка – это сложная процедура, поэтому одно уравнение второго порядка сведем к двум уравнениям первого порядка:

$$m v' + \gamma m v + m\omega_0 x \pm \alpha x^2 = f_0 \cos \omega_0 t + eE_0 \cos \omega t, \quad x' = v.$$

Здесь  $v$  – скорость электрона,  $x$  – координата частицы, член  $\alpha x^2$  имеет знак «+» при  $x \geq 0$  и знак «-» при  $x < 0$ . Конечно-разностная схема для численного решения этой системы уравнений проще, чем для исходного уравнения. Для примера, конечно-разностная производная от скорости по времени вычисляется как  $v' = (v - v_0)/\Delta t$ , где  $v_0$  – скорость частицы в некоторый момент времени  $t_0$ ,  $v$  – скорость частицы через малый интервал времени  $\Delta t$ . Для координаты  $x$  конечно-разностная производная строится аналогично.

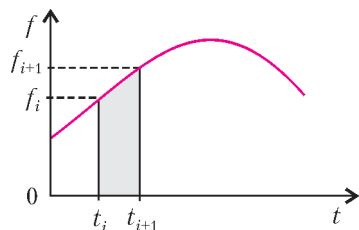
2. Произвольное движение электрона (даже непериодическое), происходящее по закону  $x(t)$ , можно представить в виде суперпозиции гармонических колебаний на различных частотах  $\omega$  с различными спектральными амплитудами  $x_\omega$ . На данной частоте  $\omega$  квадрат спектральной амплитуды  $x_\omega^2$ , определяющий спектральное значение энергии излучения, можно вычислить как сумму квадратов спектральных амплитуд:

$$x_\omega^2 = (x_\omega^k)^2 + (x_\omega^s)^2,$$

причем

$$x_\omega^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t) \cos \omega t dt, \quad x_\omega^s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t) \sin \omega t dt.$$

Численное интегрирование целесообразно производить методом трапеций. Интервал интегрирования по времени, в нашей задаче равный периоду возбуждающей волны  $T_i = 2\pi/\omega_i$ , разбивается на элементарные интервалы  $\Delta t$ . Выберем некоторое значение времени  $t_i$ , находящееся внутри интервала интегрирования. Значение подынтегральной функции в этот момент времени равно (для первого интеграла)  $f_i = x(t_i) \cos \omega t_i$ . Для момента времени  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  значение функции равно  $f_{i+1} = x(t_{i+1}) \cos \omega t_{i+1}$ . Будем считать, что в пределах интервала  $\Delta t$  функция изменяется линейно. Тогда площадь выделенной элементарной трапеции (см. рисунок)



равна  $\Delta t(f_i + f_{i+1})/2$ . Значением интеграла будет площадь всей фигуры под графиком подынтегральной функции на интервале интегрирования. Эта площадь является суммой

площадей всех элементарных трапеций. Для второго интеграла вычисления аналогичны.

#### Литература

1. А.И.Фишман. *Спектроскопия когерентного антистоксова рассеяния света* (Соросовский Образовательный Журнал, т. 7, № 4, 2001)
2. В.С.Горелик. *Комбинационное рассеяние света* (Соросовский Образовательный Журнал, т. 3, № 6, 1997)
3. Н.Н.Калиткин. *Численные методы*
4. Л.В.Турчак. *Численные методы*

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Кравцов

# Московская студенческая олимпиада по физике 2010 года

22 мая в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел городской (II) тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов.

По результатам соревнований первые пять команд приглашены для участия в заключительном (III) туре олимпиады. Это команда МГТУ им. Н.Э.Баумана, набравшая 189 баллов, команда Национального исследовательского института «МИСИС» (127 баллов), команда Российского государственного университета нефти и газа им. И.М.Губкина (92 балла), команда Московского энергетического института (66 баллов) и команда Московского государственного университета путей сообщения (57 баллов).

Победители в личном зачете (все из МГТУ им. Н.Э.Баумана): Р.Логин — первое место, А.Панфилов — второе место, К.Шириажданов — третье место.

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Заряд  $q$  массой  $m$  движется в вязкой среде с коэффициентом сопротивления  $k$  в поперечном однородном магнитном поле  $B$  с начальной скоростью  $v$ . Определите путь, который пройдет заряд, когда вектор его скорости повернется на  $360^\circ$ .

2. Сплошной кубик с ребром  $s$  и массой  $m$  скользит одной гранью по горизонтальной поверхности с коэффициентом трения, равным 1. В начальный момент скорость кубика равна  $v_0$ , и он наезжает на узкую поперечную полоску шириной  $a \ll s$  с коэффициентом трения, равным  $5/3$ . С какой скоростью будет двигаться кубик после преодоления полоски, если известно, что он не перевернулся?

3. Три цилиндра радиусом  $R$  лежат друг на друге на гладкой горизонтальной поверхности. Их оси параллельны поверхности и друг другу. Массы нижнего и верхнего цилиндра равны  $m$ , а массой среднего можно пренебречь. В начальный момент времени система потеряла устойчивость и стала двигаться так, что средний цилиндр начал выдавливаться вбок. Определите скорость верхнего цилиндра в момент соприкосновения с нижним, если проскальзывание между цилиндрами отсутствует.

4. Определите максимальную температуру, до которой можно нагреть тело, если в распоряжении имеется тепло-

вой резервуар бесконечной теплоемкости с температурой  $T$  и идеальная тепловая машина с максимальной степенью сжатия, т.е. отношением максимального объема идеального газа в тепловой машине к минимальному, равной  $\varepsilon$ . Коэффициент адиабаты газа  $\gamma$ .

5. Металлическая сфера радиусом  $R$  разделена по диаметральной плоскости, и половинки изолированы друг от друга. Одна полусфера заряжена зарядом  $q$ , при этом сила взаимодействия между половинками равна  $f$ . Определите, какой будет сила взаимодействия, если вторую полусферу зарядить зарядом  $Q$ .

6. Определите напряженность электрического поля во всех точках плоскости, проходящей через границы двух параллельных полуплоскостей, направленных в разные стороны, если расстояние между полуплоскостями равно  $a$  и они равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Угол между плоскостью и полуплоскостями равен  $\alpha$ .

7. Если металлическое тело емкостью  $C$  зарядить до потенциала  $\phi$ , а затем поднести его к другому металлическому телу, емкость которого равна  $C_1$ , и коснуться его, то потенциал второго тела после удаления первого станет  $\phi_1$ . Определите, до какого потенциала можно зарядить второе тело многократным повторением этой операции.

8. Определите силу взаимодействия на единицу длины между двумя частями цилиндрического проводника радиусом  $R$  с током, равномерно распределенным по его поперечному сечению с плотностью  $j$ , полученными в результате рассеяния цилиндрического проводника плоскостью, проходящей через ось цилиндра.

9. Интенсивность первого главного максимума дифракционной картины решетки равна  $I_0$ . Каждую третью щель этой решетки закрыли. Чему стали равны интенсивности первого, второго и третьего главных максимумов новой дифракционной решетки?

Публикацию подготовили В.Голубев, С.Пырлин, М.Яковлев

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КМШ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. Барон не ошибается.

Например, подойдут числа  $a = 4$ ,  $b = 9$ ,  $c = 6$ : ни  $a$ , ни  $b$  не делятся на  $c$ , но при этом  $ab = c^2 = 36$ , поэтому  $ab : c^2$ .

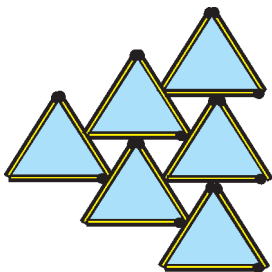


Рис. 1

Придумайте такую тройку чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , что ни  $a$ , ни  $b$  не делятся на  $c$ , но произведение  $ab$  делится на  $c^{100}$ .

2. На рисунке 1 сложены десять равносторонних треугольников – шесть синих и 4 белых.

3. 13 метров.

По теореме Пифагора получается, что за минуту один из ребят пробежит на  $\sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40}$  метров

больше, чем второй (рис.2). Поэтому за две минуты он пробежит на  $2\sqrt{40}$  метров больше.

Применив теорему Пифагора еще раз, найдем, что через две минуты расстояние между

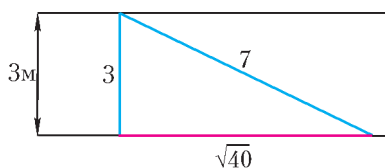


Рис. 2

Васей и Петей будет равно  $\sqrt{3^2 + (2\sqrt{40})^2} = \sqrt{169} = 13$  метров.

4. 10000 рублей.

Пусть диван стоит  $x$  рублей, первый продавец завышает все числа в  $a$  раз, а второй занижает все в  $b$  раз. Попробуем теперь разобраться в том, что они говорят. Сначала первый продавец утверждает, что диван стоит 60000 рублей, т.е.

$ax = 60000$ . После чего второй заявляет, что первый «все числа завышает в 3 раза». Поскольку в условии сказано, что продавцы путают только числа, а все остальное говорят верно, то первый действительно все завышает, но не в 3, а в  $3b$  раз. Значит,  $a = 3b$ . Наконец, первый продавец говорит про второго, что «он все числа занижает в 12 раз». В наших обозначениях это выражается равенством  $b = \frac{12}{a}$ . Получилась система из трех уравнений

$$\begin{cases} ax = 60000, \\ a = 3b, \\ b = \frac{12}{a}. \end{cases}$$

Подставляя выражение для  $b$  из третьего уравнения во второе, получим  $a = \frac{36}{a}$ , т.е.  $a = 6$ . Значит,  $x = 10000$ .

5. В точке  $C$ .

Заметим сначала, что проселочные дороги вносят один и тот же вклад в суммарное расстояние, поэтому важно только, сколько раз в нем будут учитываться участки шоссе.

Располагать остановку слева по шоссе от точки  $A$  невыгодно – сдвинув ее в точку  $A$ , мы, очевидно, уменьшим суммарное расстояние. Пусть остановка построена в точке  $O$  участка  $AB$ . Тогда слева от остановки у нас два села, а справа – семь. Это значит, что участок  $AO$  будет посчитан в суммарном расстоянии два раза, а участок  $OB$  – семь раз. Сдвинув остановку ближе к точке  $B$ , например, на 1 м, мы уменьшим суммарное расстояние на 5 м – ведь раньше этот метр учитывался семь раз, а теперь – два. Так можно уменьшать расстояние, пока

мы не передвинем остановку в точку  $B$ . Теперь мы находимся на отрезке  $BC$ . Будем передвигать остановку в сторону точки  $C$ . Снова любой сдвиг остановки к точке  $C$  будет уменьшать суммарное расстояние: передвинув остановку, скажем, на 1 м, мы добавляем к суммарному расстоянию 4 м (за села слева от остановки) и вычитаем 5 м (за села справа от нее). Уменьшение будет происходить до тех пор, пока остановка не переместится в точку  $C$ . Рассуждая точно так же, видим, что при удалении от точки  $C$  вправо по шоссе суммарное расстояние будет все время увеличиваться. Значит, точка  $C$  – искомая.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

### Вопросы и задачи

1. Если поверхность сухая, то к лучам, соответствующим окраске поверхности, добавляется рассеянный свет от ее неровностей, поэтому цвет оказывается менее ярким. Когда поверхность пропитана водой, ее неровности затягиваются поверхностной пленкой воды и рассеянное излучение исчезает, поэтому основной тон окраски воспринимается как более насыщенный.

2. Цвет материала определяется отраженными лучами, а их состав зависит от состава излучения, падающего на материал.

3. При повороте белого луча фиолетовая и ближайšie к ней полосы могут исчезнуть с экрана из-за того, что углы падения соответствующих цветных лучей на внутреннюю поверхность призмы увеличатся настолько, что будет происходить их полное внутреннее отражение.

4. Нагреваемое тело начинает испускать лучи, соответствующие большей частоте, и максимум спектра смещается в сторону фиолетового цвета.

5. Изображение синей половины прямоугольника получается ближе к линзе, чем изображение красной, поскольку фокусное расстояние линзы больше для красных лучей, чем для синих.

6. В глазу, как и в любой линзе, красные лучи преломляются слабее, поэтому возникает зрительное впечатление, что красные предметы находятся ближе, чем синие или зеленые.

7. Призматический спектр растянут в коротковолновой части, а в дифракционном спектре одинаковым интервалам длин волн отвечают участки спектра одинаковой длины.

8. Надо погрузить порошок в жидкость с таким же показателем преломления, как и у стекла. Тогда порошок перестанет рассеивать свет равномерно во все стороны и будет вести себя как целое стекло.

9. Часть лучей, испускаемых поверхностью Солнца, поглощается окружающей его газовой оболочкой и земной атмосферой.

10. Во время затмения все лучи от фотосферы Солнца задерживаются Луной, а Земли достигают лучи только от атмосферы Солнца, поэтому линии поглощения становятся линиями испускания.

11. Черная, так как она поглощает все падающие на нее лучи.

12. Нет. Синяя краска поглощает все цвета, но отражает синий, голубой и зеленый, а желтая краска поглощает все цвета, но отражает зеленый, желтый и оранжевый. Поэтому обе краски в смеси отражают только зеленый цвет. При освещении же бумаги синим и желтым цветами оба они отражаются и вызывают ощущение белого цвета.

13. Синие стекла пропускают не только синие лучи, но частично и красные. Вместе с тем, листья растений отражают не только зеленый, но отчасти и красный свет.

14. Фотопленка реагирует на красный свет так же, как на

темноту, т.е. «не отличает» красного от черного. Поэтому красный череп на белом флаге получится черным (на позитиве), а череп на черном флаге на снимке виден не будет.

15. Когда свет в комнате, вначале яркий, постепенно ослабевает, механизм зрения переключается с «колбочкового», одинаково чувствительного к разным цветам, на «палочковый», наиболее чувствительный к зеленому свету, менее – к синему и еще менее – к красному.

16. Красный свет виден с наибольшего расстояния, так как меньше всего рассеивается в атмосфере.

17. Между далекими объектами и наблюдателем находится толстый слой воздуха, который из-за рассеяния солнечного света воспринимается глазом голубым.

**Микроопыт**

Слой воды над зеркалом образует призму, которая разлагает свет в радужный спектр.

**ДВА ЭТЮДА О ДИНАМИКЕ**

1.  $a = \frac{g}{5} = 2 \text{ м/с}^2$ ,  $T_1 = \frac{4mg}{5} = 8 \text{ Н}$ ,  $T_2 = \frac{6mg}{5} = 12 \text{ Н}$ .
2.  $a = \frac{3g}{5} = 6 \text{ м/с}^2$ ,  $T_A = T_B = \frac{8mg}{5} = 16 \text{ Н}$ ,  $T_{\text{ол}} = 2T_A = 32 \text{ Н}$ .
3.  $a = \frac{mg}{2M+m} = 0,5 \text{ м/с}^2$ ,  $P = \frac{2Mmg}{2M+m} = 0,95 \text{ Н}$ .
4.  $a = 6 \text{ м/с}^2$ ,  $T_1 = 16 \text{ Н}$ ,  $T_2 = 32 \text{ Н}$ ,  $m_3 = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} = 3,2 \text{ кг}$ .
5.  $a = \frac{x}{l} g$ .

6. На рисунке 3 показано, как изменяется рисунок 9 задачи при изменении угла  $\beta$  от  $90^\circ$  до значения  $-\alpha$  (при этом угол  $\beta$  удобнее указывать относительно точки вращения). Этот рисунок дает ответы к случаям а)–д). Случаи е) и ж)

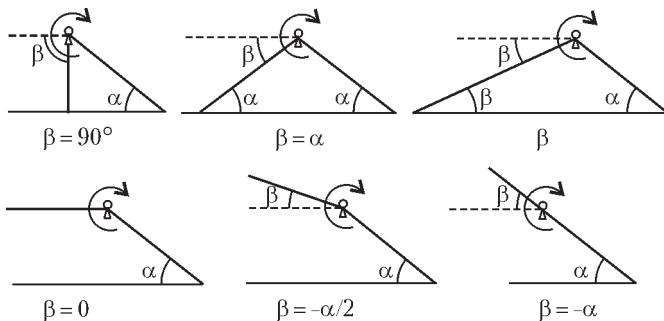


Рис. 3

разберите сами. А мы нарисуем, что происходит в последнем случае з). Будем исходить из рисунка 9,а ( $\beta = \alpha$ ). Увеличивая угол  $\alpha$  до  $90^\circ$  (рис.4), мы приходим к случаю блока, закрепленного на подставке. Это, конечно, несколько не то, что

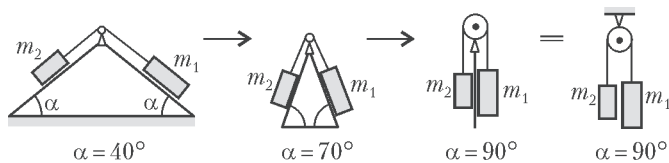


Рис. 4

показано на рисунке 9,з, но мы думаем, каждый согласится, что по смыслу задачи совершенно не важно, как закреплен блок: на подставке или подвешен к потолку.

Установив, какие значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют каждой картинке, легко из общей формулы получить ответы к каждой задаче. Мы собрали их в таблицу:

Углы	Ускорение	Натяжение нити
а) $\beta = \alpha$	$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin \alpha$	$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g \sin \alpha$
б) $\beta = 0$	$a = \frac{m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g$	$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} g \sin \alpha$
в) $\beta = -\alpha/2$	$a = \frac{m_1 \sin \alpha + m_2 \sin(\alpha/2)}{m_1 + m_2} g$	$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} g (\sin \alpha - \sin(\alpha/2))$
г) $\beta = -\alpha$	$a = g \sin \alpha$	$T = 0$
д) $\beta = 90^\circ$	$a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g$	$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} g (\sin \alpha + 1)$
е) $\alpha = 90^\circ$ $\beta = 0$	$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$	$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} g$
ж) $\alpha = 0$ $\beta = 0$	$a = 0$	$T = 0$
з) $\alpha = 90^\circ$ $\beta = 90^\circ$	$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$	$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g$

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**9 класс**

1. Трое.

2. Предположим противное. Обозначим наши числа  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ ; будем считать, что  $a_{100+n} = a_n$ . Тогда выполнены неравенства  $a_n + a_{n+3} \leq a_{n+1} + a_{n+2}$ , или  $a_{n+3} - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_n$  при  $n = 1, 2, \dots, 100$ . Значит,  $a_{100} - a_{99} \leq a_{98} - a_{97} \leq \dots \leq a_2 - a_1 \leq a_{100} - a_{99}$ , что означает, что все эти неравенства обращаются в равенства. Итак,  $a_{2n} - a_{2n-1} = k$  при всех  $n = 1, 2, \dots, 50$  и, аналогично,  $a_{2n+1} - a_{2n} = l$  при  $n = 1, 2, \dots, 50$ . Просуммировав все 100 полученных равенств, получаем  $0 = 50k + 50l$ , откуда  $k = -l$ . Но тогда  $a_3 - a_2 = l = -k = -(a_2 - a_1) = a_1 - a_2$ , т.е.  $a_1 = a_3$ . Это противоречит условию.

3. Пусть  $M$  (рис.5) – вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников  $ACE$  и  $BCE$  (она есть, так как в случае касания прямые  $AE$  и  $BD$  были бы параллельными). Нам достаточно показать, что описанная окружность треугольника

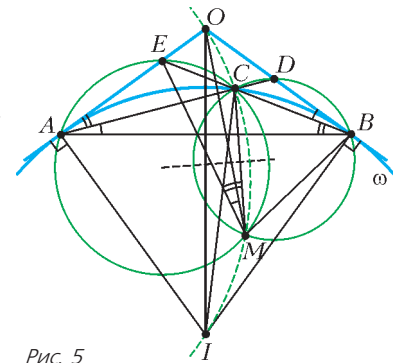


Рис. 5

$OCI$  также проходит через точку  $M$ , так как в этом случае центры всех трех окружностей из условия будут лежать на серединном перпендикуляре к отрезку  $CM$ .

Обозначим  $\angle CAB = \alpha$  и  $\angle CBA = \beta$ ; без ограничения общности можно считать, что  $\beta > \alpha$ . По свойству угла между хордой и касательной,  $\angle OBE = \alpha$ , аналогично,  $\angle DAE = \beta$ . В четырехугольнике  $OBIA$  углы  $A$  и  $B$  прямые, поэтому он вписанный; значит,  $\angle OIA = \angle OBA = \alpha + \beta$ . Следовательно,

$$\angle CIO = \angle CIA - \angle OIA = 2\angle CBA - (\alpha + \beta) = \beta - \alpha.$$

Для того чтобы доказать, что точка  $M$  лежит на описанной окружности треугольника  $OCI$ , нам достаточно доказать равенство  $\angle CMO = \beta - \alpha$ .

Поскольку четырехугольники  $AECM$  и  $DBMC$  вписаны, получаем

$$\begin{aligned} \angle BME &= \angle BMC + \angle CME = \\ &= (180^\circ - \angle CDB) + \angle CAE = \angle ODA + \angle DAO = 180^\circ - \angle EOB, \end{aligned}$$

т.е. четырехугольник  $EOBM$  также вписан, и  $\angle OMA + \angle OBE = \alpha$ . Следовательно,

$$\angle CMO = \angle CME + \angle OME = \angle CAE - \alpha = \beta - \alpha,$$

что и требовалось доказать.

*Замечание.* Точка  $M$  является *точкой Микеля* четырехсторонника, образованного прямыми  $AC, BC, AO$  и  $BO$ , т.е. точка  $M$  будет лежать на описанной окружности треугольника, образованного любыми тремя из этих четырех прямых. Таким образом, точка  $M$  будет лежать не только на описанных окружностях треугольников  $AEC, BCD, EOB$ , как мы показали, но и на описанной окружности треугольника  $AOD$ .

5. Предположим противное. Пусть для определенности  $b > a$ ;

тогда  $20(b-a) \geq 1$ , т.е.  $b-a \geq \frac{1}{20}$ .

Дискриминант второго трехчлена в исходном уравнении отрицателен, откуда  $100b^2 - 10a < 0$ . Значит,  $10b^2 < a \leq b - \frac{1}{20}$ ,

т.е.  $10b^2 - b + \frac{1}{20} < 0$ . Но это невозможно, поскольку дискри-

минант трехчлена  $f(b) = 10b^2 - b + \frac{1}{20}$  также отрицателен, а старший член положителен.

6. 998.

Назовем гнома *красным* или *синим*, если на нем надет колпак соответствующего цвета. Заметим, что один гном может сказать требуемую фразу другому тогда и только тогда, когда эти гномы разноцветны: синий гном при этом скажет правду, а красный – солжет. Теперь, если какие-то три гнома не выворачивали колпаков, то два из них одного цвета и они не смогут сказать друг другу требуемого, что неверно. Значит, таких гномов не больше двух, и выворачиваний было не меньше  $1000 - 2 = 998$ .

Будем говорить, что два гнома *пообщались*, если каждый из них сказал другому заветную фразу. Опишем, как могло случиться всего 998 выворачиваний, если, например, вначале гном Вася был синим, а остальные – красными. В начале дня каждый гном пообщался с Васей. Затем красные гномы по очереди выворачивали свои колпаки. При этом после каждого выворачивания все красные гномы пообщались с изменившим цвет. Когда останется только один красный гном, то любая пара гномов уже пообщается друг с другом (в тот момент, когда первый из них сменил цвет), при этом произойдет 998 изменений цвета.

*Замечание.* Построить пример с 998 изменениями цвета можно, начиная с любой ситуации, в которой не все гномы одноцветны.

7. Бесконечно.

Докажем, что неудачным является любое число вида  $n = p^2$ , где  $p$  – нечетное простое число. Предположим противное, т.е.

$$(y^2 - 1)p^2 = x^2 - 1 \quad (*)$$

при некоторых натуральных  $x, y \neq 1$ . Тогда либо  $x + 1$ , либо  $x - 1$  делится на  $p$ .

Пусть  $x + 1 : p$ . Тогда  $x - 1 = (x + 1) - 2$  не делится на  $p$ , и из (\*) получаем, что  $x + 1 : p^2$ , т.е.  $x = kp^2 - 1$  при некотором натуральном  $k$ . Подставляя в (\*), получаем

$$y^2 = \frac{x+1}{p^2}(x-1) + 1 = k(kp^2 - 2) + 1 = k^2p^2 - 2k + 1.$$

Но  $k^2p^2 > k^2p^2 - 2k + 1 > k^2p^2 - 2kp + 1$ , т.е.

$(kp)^2 > y^2 < (kp-1)^2$ , что невозможно.

Если же  $x - 1 : p$ , то аналогично получаем  $x = kp^2 + 1$ ,  $y^2 = k^2p^2 + 2k + 1$ ,  $(kp)^2 < y^2 < (kp+1)^2$ , что опять же невозможно.

8. Пусть  $N$  – середина стороны  $AC$ , а  $K$  – точка на прямой  $MN$  такая, что  $MK = MN$  (рис.6). Тогда треугольники  $MNC$  и  $MKB$  симметричны относительно  $M$  и потому равны. Про-

ведем разрез по средней линии  $MN$ ; переложив треугольник  $MNC$  так, чтобы он совпал с  $\triangle MKB$ , получаем параллелограмм  $ANKB$ . Если  $AN = AB$ , то ромб уже получен.

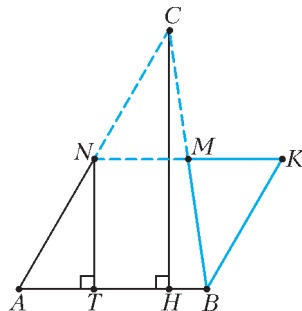


Рис. 6

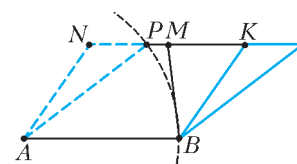


Рис. 7

Пусть  $AN < AB$  (рис.7). Проведем окружность с центром в точке  $A$  и радиусом  $AB$ . Тогда точка  $N$  лежит внутри окружности, а  $M$  – вне, поэтому окружность пересечет отрезок  $MN$  в точке  $P$ . Отрезав от параллелограмма  $ANKB$  треугольник  $APN$  и сдвинув его так, чтобы сторона  $AN$  совпала с  $BK$ , мы получим ромб.

Пусть, наконец,  $AN > AB$ . Поскольку треугольник  $ABC$  остроугольный, основание  $H$  высоты  $CH$  лежит на отрезке  $AB$  (см. рис.6). Далее, основание  $T$  перпендикуляра, опущенного из  $N$  на  $AB$ , есть середина отрезка  $AH$ ; значит,

$BT > AT$ , а тогда  $BN > AN$ . Значит, окружность с центром в точке  $B$  и радиусом, равным  $AN$ , пересечет сторону  $AN$  в точке  $S$ , ибо точка  $N$  лежит вне, а точка  $A$  – внутри этой окружности (рис.8). Отрезав от параллелограмма  $ANKB$  треугольник  $ABS$  и сдвинув его до совмещения стороны  $AB$  со стороной  $NK$ , мы получим ромб.

*Замечание.* Можно доказать, что любой тупоугольный треугольник также можно разрезать требуемым образом. Действительно, если угол  $B$  тупой и  $AB \geq BC$ , то медиана  $AM$  точно длиннее стороны  $AB$ , и при этом  $AN < AB$ .

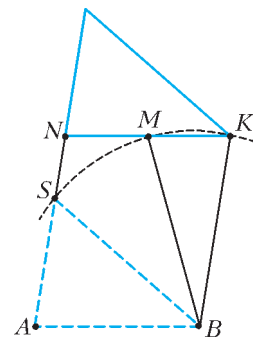


Рис. 8

### 10 класс

1. Трое.

3. Пусть для определенности  $AB > AC$  (рис.9). Обозначим через  $L$  середину отрезка  $AB$ . Заметим, что  $\angle AOL =$

$= \frac{1}{2} \angle AOB = \angle ACB$ . Отсюда  $\angle BAO = 90^\circ - \angle AOL = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAD$ .

Стороны треугольника  $OPQ$  соответственно перпендикулярны сторонам треугольника  $ABC$ , поэтому  $\triangle OPQ$  подобен  $\triangle ABC$ : он получается

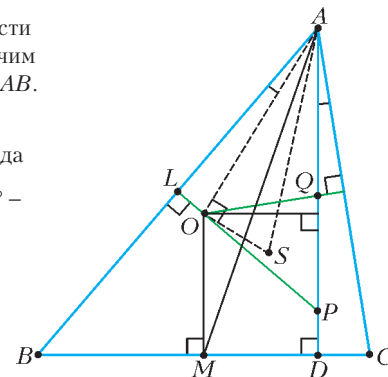


Рис. 9



из  $\triangle ABC$  последовательным выполнением поворота на  $90^\circ$  и гомотетии с некоторым коэффициентом  $k$ . Так как  $OS$  и  $AO$  – соответственные отрезки в треугольниках  $OPQ$  и  $ABC$ , то  $OS \perp AO$  и  $OS = kAO$ . Далее, отрезок  $MD$  равен высоте треугольника  $OPQ$ , проведенной к стороне  $PQ$ , поэтому  $MD = kAD$ . Значит, прямоугольные треугольники  $AOS$  и  $ADM$  подобны, поэтому  $\angle SAO = \angle MAD$ .

Окончательно,

$$\angle BAS = \angle BAO + \angle SAO = \angle CAD + \angle MAD = \angle CAM.$$

8. Рассмотрим граф  $G$ , вершинами которого являются города и две вершины соединены ребром, если между городами есть авиалиния. Тогда нам известно, что граф связан, но при удалении всех ребер любого нечетного цикла это условие нарушается; доказать же нужно, что вершины графа можно правильно раскрасить в 4 цвета. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

**Лемма.** Пусть в графе нет циклов нечетной длины. Тогда его вершины можно правильно раскрасить двумя красками.

**Доказательство.** Ясно, что достаточно доказать лемму для связного графа. Расстоянием между двумя вершинами  $X$  и  $Y$  назовем наименьшую длину пути, соединяющего эти вершины.

Зафиксируем некоторую вершину  $A$  и покрасим все вершины, находящиеся на нечетном расстоянии от  $A$ , в красный цвет, а остальные вершины – в синий цвет. Докажем, что указанная раскраска – искомая. Предположим противное: пусть имеется ребро, соединяющее, скажем, красные вершины  $B$  и  $C$ . Рассмотрим кратчайшие пути  $A = B_0, B_1, \dots, B_{2n-1} = B$  и  $A = C_0, C_1, \dots, C_{2m-1} = C$ , ведущие из  $A$  в  $B$  и в  $C$ . Взяв наибольший индекс  $i$  такой, что  $B_i = C_i$ , получим цикл нечетной длины  $B_i, B_{i+1}, \dots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, \dots, C_i = B_i$ . Противоречие.

Пусть в графе есть цикл; удалим одно из ребер этого цикла. При этом, очевидно, граф останется связным. Продолжим этот процесс до тех пор, пока циклов в графе не останется. Обозначим через  $V$  множество всех удаленных ребер, а через  $W$  – множество всех оставшихся. Заметим, что оставшийся граф по-прежнему связан. Это значит, что не существует нечетного цикла, все ребра которого принадлежат  $V$ ; в самом деле, если бы такой цикл существовал, то при удалении из  $G$  всех его ребер остались бы все ребра множества  $W$  и граф остался бы связным.

Теперь рассмотрим два графа  $G_V$  и  $G_W$ , вершинами которых являются вершины графа  $G$ , а множества ребер – это  $V$  и  $W$  соответственно. Тогда в графе  $G_W$  циклов нет (значит, его вершины можно правильно раскрасить в цвета 0 и 1), а в  $G_V$  по доказанному нет нечетных циклов (значит, его вершины можно правильно раскрасить в цвета 0 и 2). Присвоим теперь каждой вершине сумму ее цветов в этих раскрасках. Тогда, если две вершины соединены ребром в графе  $G$ , то они соединены ребром в одном из графов  $G_V$  или  $G_W$ ; значит, как нетрудно видеть, их цвета различны, т.е. полученная раскраска (в цвета 0, 1, 2, 3) является правильной.

11 класс

1. Не существуют.

Рассмотрим произвольные ненулевые числа  $a_1, \dots, a_{10}$ . Заметим, что числа  $a_k$  и  $\frac{1}{a_k}$  имеют одинаковые знаки. Значит,

$$\left| a_k + \frac{1}{a_k} \right| = |a_k| + \left| \frac{1}{a_k} \right| > \max \left( |a_k|, \left| \frac{1}{a_k} \right| \right) \geq \left| a_k - \frac{1}{a_k} \right| \geq 0.$$

Перемножая эти неравенства, получаем, что

$$\left| a_1 + \frac{1}{a_1} \right| \cdot \dots \cdot \left| a_{10} + \frac{1}{a_{10}} \right| > \left| a_1 - \frac{1}{a_1} \right| \cdot \dots \cdot \left| a_{10} - \frac{1}{a_{10}} \right|,$$

т.е. требуемое равенство невозможно.

2. Пронумеруем строки числами  $1, \dots, n$  сверху вниз, а столбцы – теми же числами слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров ее строки и столбца; при этом будем считать, что клетки диагонали из плюсов имеют координаты  $(i, i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Заметим, что если четыре клетки лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, то любая операция либо не меняет знаков в этих клетках, либо меняет знаки ровно в двух клетках из четырех. В частности, четность количества плюсов в этих четырех клетках не меняется; значит, если среди них вначале был ровно один плюс, то и потом плюсов будет не менее одного.

Теперь выберем в нашей таблице  $n$  непересекающихся таких четверок; по сказанному выше, после любых операций в каждой из них найдется как минимум один плюс, следовательно, всего плюсов будет не менее  $n$ . При  $i = 1, 2, \dots, n - 2$  выберем четверку клеток  $\{(i, i), (i, i + 1), (i + 2, i), (i + 2, i + 1)\}$ , а также выберем четверки  $\{(n - 1, n - 1), (n - 1, n), (1, n - 1), (1, n)\}$  и  $\{(n, n), (n, 1), (2, n), (2, 1)\}$ . Легко видеть, что они удовлетворяют всем требованиям. На рисунке 10 отмечены такие четверки при  $n = 5$ .

1	1		4	4
5	2	2		5
1	1	3	3	
	2	2	4	4
5		3	3	5

Рис. 10

4.  $k = \lfloor n/2 \rfloor$ .

**Лемма.** Для любых точек  $A_i = (x_i, y_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, найдется такой многочлен  $P(x, y)$  степени не больше  $\lfloor n/2 \rfloor$ , что  $P(x_n, y_n) = 1$  и  $P(x_i, y_i) = 0$  при  $i = 1, \dots, n - 1$ .

**Доказательство.** Заметим, что существуют такие  $d = \lfloor n/2 \rfloor$  прямых, что точка  $A_n$  не лежит ни на одной из них, а каждая из точек  $A_1, \dots, A_{n-1}$  лежит хотя бы на одной (при нечетном  $n$  это прямые  $A_1A_2, A_3A_4, \dots, A_{n-4}A_{n-3}, A_{n-2}A_{n-1}$ , а при четном  $n$  – прямые  $A_1A_2, A_3A_4, \dots, A_{n-3}A_{n-2}, A_{n-2}A_{n-1}$ ). Пусть  $k_i x + l_i y + m_i = 0$  – уравнение  $i$ -й прямой ( $i = 1, \dots, d$ ). Тогда многочлен

$$Q(x, y) = \frac{(k_1 x + l_1 y + m_1) \dots (k_d x + l_d y + m_d)}{(k_1 x_n + l_1 y_n + m_1) \dots (k_d x_n + l_d y_n + m_d)}$$

является искомым.

Покажем, что число  $k = \lfloor n/2 \rfloor$  подходит. При каждом  $i = 1, \dots, n$  найдем согласно лемме многочлен  $P_i(x, y)$ , обращающийся в ноль во всех точках  $A_1, \dots, A_n$ , кроме  $A_i$ , причем  $P_i(x_i, y_i) = 1$ . Тогда многочлен  $P(x) = c_1 P_1(x, y) + \dots$

$\dots + c_n P_n(x, y)$  принимает требуемые значения во всех точках  $A_1, \dots, A_n$ .

Осталось показать, что при  $k < \lfloor n/2 \rfloor$  утверждение неверно. Рассмотрим точки  $A_i(i, i^2)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), лежащие на параболе  $y = x^2$ , и положим  $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0, c_n = 1$ . Поскольку парабола пересекается с прямой не более чем по двум точкам, точки  $A_i$  удовлетворяют условию. Предположим, что существует многочлен  $P(x, y)$  степени, не превосходящей  $k$ , для которого  $P(x_i, y_i) = c_i$ . Положим  $Q(x) = P(x, x^2)$ ; тогда степень  $Q(x)$  не превосходит  $2k$ . По нашему предположению,  $Q(1) = Q(2) = \dots = Q(n-1) = 0$  и  $Q(n) = 1$ . Таким образом, ненулевой многочлен  $Q(x)$  имеет  $n - 1$  корень, т.е. его степень не меньше  $n - 1$ ; тогда и  $2k \geq n - 1$ . Это и значит, что  $k \geq \lfloor n/2 \rfloor$ .

8. Мы докажем утверждение задачи в более общем виде, для  $n \geq 2$  предметов и  $2^n$  детей, произвольно разбитых на  $2^{n-1}$  пар соседей. Заметим, что существует ровно  $2^n$  наборов из  $n$

предметов; значит, каждый набор предметов интересен ровно одному ученику.

Индукция по  $n$ . При  $n = 2$  легко проверить утверждение непосредственно. Пусть  $n > 2$ ; рассмотрим любых двух соседей, выберем какой-нибудь предмет, интерес к которому у них различен (скажем, физику), и разобьем всех детей на две группы по  $2^{n-1}$  детей: в группу  $A$  попадут те, кому физика интересна, а в группу  $B$  – все остальные.

Отделим группу  $A$  в другой интернат, с  $2^{n-2}$  комнатами. При этом те пары, что были соседями раньше, оставим соседями. Остальных же (согласно выбору предмета, они есть; при этом их число, очевидно, четно) разобьем на пары соседей произвольно. Назовем такие пары «новыми».

По предположению индукции, теперь группу  $A$  можно расставить по кругу  $K$  с выполнением условий. Пусть

$(x_1, x_2), \dots, (x_{2k-1}, x_{2k})$  – все новые пары в порядке обхода этого круга по часовой стрелке ( $x_{2i-1}$  находится перед  $x_{2i}$ ; мы будем считать, что  $x_{2k+1} = x_1$ ). Обозначим через  $x'_i$  исходного соседа человека  $x_i$  (по построению,  $x'_i$  находится в группе  $B$ ) и объявим пары  $(x'_2, x'_3), \dots, (x'_{2k-2}, x'_{2k-1}), (x'_{2k}, x'_1)$  «новыми» парами в группе  $B$ . Ясно, что новые пары, вместе со старыми, дают нам разбиение группы  $B$  на пары соседей.

Теперь, применив предположение индукции к группе  $B$  с этим разбиением, расставим ее по кругу с выполнением условий. Вставим теперь между любыми детьми новой пары  $(x'_{2i}, x'_{2i+1})$  отрезок круга  $K$  от  $x_{2i}$  до  $x_{2i+1}$ . Нетрудно видеть, что теперь все дети стоят в кругу и расстановка удовлетворяет всем условиям.

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLIV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

#### Теоретический тур

##### 9 класс

1.  $\rho_1 = 0,8 \text{ г/см}^3$ . 2. 1)  $l = \frac{L}{2}$ ; 2)  $\tau = \frac{\sqrt{3} L}{2 v}$ ; 3)  $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L}{v}$ .  
3.  $m = \rho_0 V_0 \left(1 - \frac{\rho_0 - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} \frac{c_0 \Delta t}{\lambda}\right)^{-1} \approx 1160 \text{ г}$  (здесь  $\Delta t = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ).  
4. 1)  $t_3 \approx 109 \text{ }^\circ\text{C}$ ; 2)  $t_3 = 380 \text{ }^\circ\text{C}$ .

##### 10 класс

1. 1)  $\mu \geq \frac{M m_2}{m_1 (m_1 + m_2 + M)} = \frac{1}{2}$ ; 2)  $\mu_{\min} = \frac{1}{2}$ ;  
3)  $t = \sqrt{\frac{2L/g}{\frac{M - \mu m_1}{m_1 + M} - \frac{\mu m_1}{m_2}}} \approx 0,9 \text{ с}$  (здесь  $\mu = \frac{1}{4}$ ).  
2. 1)  $\alpha = 0,2$ ; 2)  $k_{\min} = \frac{T_{\min 2}}{T_{\min 1}} \approx 9,2$ .  
3. 1)  $t_0 = \frac{2v_0}{g \sin \alpha}$ ; 2)  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ ;  
3)  $t = \frac{v_0}{g} \left( \frac{1}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha}} \right)$ ; 4)  $\mu = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ .  
4. 1)  $\varepsilon_1 \approx 16,4 \text{ В}$ ,  $U_{B1} \approx 6,4 \text{ В}$ ,  $I_{B1} \approx 0,36 \text{ А}$ ;  
2)  $U_{B2} = U_{B2} \approx 9,2 \text{ В}$ ,  $I_{B2} \approx 1,42 \text{ А}$ .  
5. 1)  $U_C = \frac{2}{3} \varepsilon$ ,  $U_{2C} = \frac{1}{3} \varepsilon$ ; 2)  $Q = \frac{C \varepsilon^2}{2}$ .

##### 11 класс

2. Если  $\mu < \frac{M}{m_1 + m_2 + M} = \mu_{\min}$ , то  $L = 0$ ; если

$$\mu_{\min} < \mu < \mu_0 = \frac{M}{m_2} \frac{2m_1 + m_2 + 2M}{m_1 + m_2 + M}, \text{ то}$$

$$L = \frac{g}{k} \frac{m_2}{m_1 + M} (\mu (m_1 + m_2 + M) - M);$$

если  $\mu > \mu_0$ , то  $L \rightarrow \infty$ . Если  $\mu \leq \mu_0$ , то

$$t = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + M}{k}} \arccos \left( 1 - \frac{kL}{Mg} \right).$$

3. 1)  $P = \alpha \left( T_1 + T_2 - \left( T + \frac{T_1 T_2}{T} \right) \right)$ ; 2)  $T_m = \sqrt{T_1 T_2} = 489,9 \text{ К}$ ;

3)  $P_{\max} = \alpha (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 \approx 120 \text{ кВт}$ ;

4)  $\eta = \frac{T_1 - T_m}{T_m} \cdot 100\% = 38,7\%$ .

### МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2010 ГОДА

1.  $s = \frac{mv}{k} \left( 1 - \exp \left( -\frac{2\pi k}{qB} \right) \right)$ . 2.  $v = 0$ . 3.  $v = \sqrt{3gR}$ .

4.  $T_{\max} = \varepsilon^{1-\gamma} T$ . 5.  $F = f \left( 1 + \frac{Q}{q} \right) + \frac{qQ}{8\pi \varepsilon_0 R^2}$ .

6. Напряженность равна нулю во всех точках между плоскостями и равна  $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  снаружи.

7.  $\varphi_x = \frac{C\varphi_1\varphi}{C\varphi - C_1\varphi_1}$ . 8.  $f = \frac{1}{3} \mu_0 j^2 R^3$ . 9.  $\frac{I_0}{9}$ ,  $\frac{I_0}{9}$  и  $\frac{4I_0}{9}$ .

## Квант журнал ©

### НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан**

### НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
М.В.Сумнина**

### ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

### КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

#### Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»  
Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,  
phys@kvant.info  
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО «Орден Трудового Красного Знамени  
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru  
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

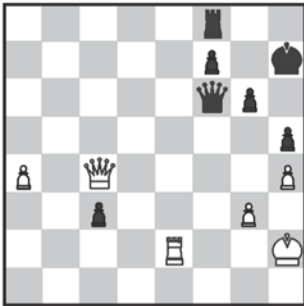
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

## КВАРТЕТ ФЕРЗЕЙ

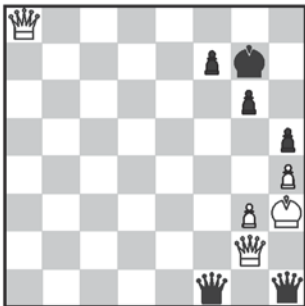
Достигнув крайней линии, пешка может превратиться в любую фигуру, и, значит, теоретически у каждой стороны может появиться девять ферзей (один есть изначально). Но на практике даже четыре ферзя – большая редкость.

**Х.Р.Капабланка – А.Алехин**

**Буэнос-Айрес, 1927**



Эндшпиль протекал напряженно, со взаимными ошибками. Так, вместо **1. a5?** белым сейчас необходимо было сыграть **1. ♖g2**, не допуская связи лады. **1... ♜d8?!** И Алехин допускает неточность, сразу выигрывало **1... ♜f1!** **2. ♜e4 ♜d8. 2. a6?** И здесь правильно **2. ♖g2**, хотя ферзевое окончание скорее всего выиграно для черных. Но теперь следует эффектный финал. **2... ♜f1! 3. ♜e4.** Не спасало **3. a7 ♜d2!** **4. ♜:d2 ♜:c4 5. a8 ♜ (5. ♜c2 ♜a4) 5...cd. 3... ♜d2 4. ♜:d2 cd 5. a7 d1 ♜ 6. a8 ♜ ♜g1+ 7. ♖h3.** Итак, у обоих игроков по два ферзя, но Алехин объявляет смертельный шах – **7... ♜df1+**, и белые сдались – **8. ♜g2 ♜h1×**.



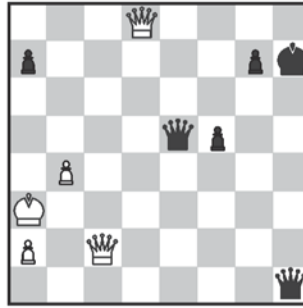
Уникальный финал в битве двух корифеев. Заключительную часть партии Алехин назвал подлинной комедией ошибок. Но в спортивном отношении она сыграла весьма важную роль. В матче на первенство мира Алехин только сравнивал счет, а утомленный Капабланка после этого проиграл и следующую партию. Инициатива

была полностью утрачена, и в конце концов Алехин взял верх и стал чемпионом мира.

В следующем примере у каждой стороны на доске по паре ферзей. У белых не хватает пешки, к тому же уязвим король. Излишняя агрессивность дорого обходится им.

**Эд.Ласкер – А.Алехин**

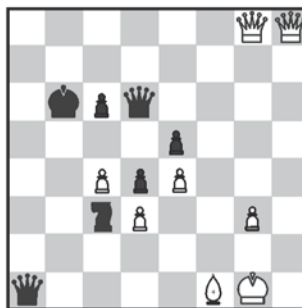
**Париж, 1913**



**1. ♜c4?** После **1. ♜dd3!** белые сохраняли шансы на спасение – **1... ♜he4 2. ♜:e4 fe 3. ♜c5 ♜:c5 4. bc,** и пешки превращаются в ферзей одновременно. Но Эдуард Ласкер надеялся на контригру и сыграл азартно. **1... ♜he4! 2. ♜dg8+.** После **2. ♜cg8+ ♖g6** у белых нет ни одного шаха. **2... ♖h6 3. ♜a6+ ♖g5 4. ♜:a7.** Белые восстановили материальное равновесие, но попали под матовую атаку. **4... ♜c3+ 5. ♜b3 ♜e:b4×**.

**Р.Фишер – Т.Петросян**

**Блед – Порторож, 1959**



На доске квартет ферзей, а у обоих королей есть свои заграждения. **1... ♜a7 2. g4 ♖c5! 3. ♜f8?** Правильно сразу **3. ♜h2!**, не позволяя черному предводителю скрыться на ферзевом фланге. **3... ♜ae7.** Защищая пешку e5. **4. ♜a8 ♖b4! 5. ♜h2 ♖b3!** Здесь партия была отложена, и белые записали ход **6. ♜a1.** В ответ последовало **6... ♜a3.** Единственная защита от мата. **7. ♜:a3+ ♖:a3 8. ♜h6 ♜f7! 9. ♖g2 ♖b3 10. ♜d2 ♜h7! 11. ♖g3?** Зевок, но выигрыша у белых уже нет – **11. g5**

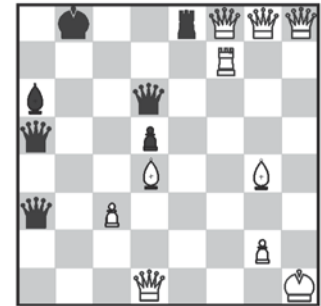
**♜h4. 11... ♜:e4! 12. ♜f2.** Лучше было **12. g5**, и напряжение еще сохранялось. **12... ♜h1.** Инициатива уже на стороне черных, но после утомительной борьбы Петросян не смог перестроиться и принял предложенную Фишером ничью.

И наконец, пример-монстр, фантастическая партия «О семи ферзях».

**Самплер – Кинг**

**Австралия, 1965**

**Сицилианская защита**



**1. e4 c5 2. ♖f3 ♖c6 3. d4 cd 4. ♖:d4 e6 5. ♖c3 ♜c7 6. ♜e2 a6 7. 0-0 b5 8. ♖h1 ♖f6 9. f4 b4 10. e5 bc 11. ef cb 12. fg ba ♜.** Два ферзя остались на доске, а вот появился и третий! **13. gh ♜.** Четвертый! **13... ♜:a2 14. ♜:h7 a5 15. h4 a4 16. h5 a3 17. h6 ♜b1 18. ♜g8 a2 19. h7 a1 ♜.** Пятый ферзь! **20. h8 ♜.** А за ним и шестой! **20... ♜b4 21. ♜e3 ♖:d4 22. ♜:d4 ♜aa3 23. ♜h5 d5 24. f5 ♜a6 25. fe 0-0-0 26. ♜:f7 ♜ca5 27. c3 ♜d6 28. ♜g4 ♜e8 29. e7+ ♖b8 30. ef ♜.** Вот и седьмой ферзь! **Черные сдались.**

Пример для Книги рекордов Гиннеса – на доске великолепная семерка ферзей! Эта партия перепечатывается из одного издания в другое уже 45 лет. Но до сих пор остается вопрос: настоящая ли она или выдуманная? Имен двух партнеров, создавших этот шедевр, не удалось найти ни в каких справочниках...

*Е.Гук*

# Продукты с физикой



## Люминесцентная лампа в микроволновке

Можно ли зажечь люминесцентную лампу,  
просто поместив ее в микроволновую печь?  
Оказывается, можно ...

(Продолжение - на странице 49 внутри журнала)